BARYCENTRE

Exercice 1

Soit A et B deux points du plan tels que AB = 4.

On désigne par Γ l'ensemble des points M du plan tels que $\left\|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}\right\| = 4$

et par O le symétrique du point B par rapport à A.

Montrer que Γ est le cercle de centre O et de rayon 4, puis tracer Γ

Exercice 2

On considère deux points A et B tels que $AB = 8$

1. Construire G barycentre des points pondérés $(A,5)$ et $(B,3)$
2. Construire H barycentre des points pondérés $(A,11)$ et $(B,-3)$
3. M étant un point du plan justifier que les vecteurs $\vec{u} = 5\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}$

et $\vec{v} = 11\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{MB}$ sont colinéaires à $\overrightarrow{MG}$ et $\overrightarrow{MH}$.

4. Déterminer puis construire l'ensemble E_1 des points M du plan vérifiant

$$\left\|5\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}\right\| = \left\|11\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{MB}\right\|.$$

Exercice 3

A, B et C sont trois points non alignés de $\mathcal{E}$ et G est le centre de gravité du

triangle ABC. Pour tout point M du plan, on pose $\vec{V} = 2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}$

1. Montrer que pour tout point M du plan, $\vec{V}$ est un vecteur indépendant du point M.

2. Montrer que l'ensemble des points M de $\mathcal{E}$ tel que:

$$\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\| = \left\|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right\|$$

est un cercle de centre G dont on précisera le rayon et que l'on construira..

BARYCENTRE

Exercice 4

Soit A, B et C trois points non alignés.

1. M étant un point quelconque du plan, montrer que le vecteur $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MC}$ est un vecteur constant.

2. En déduire alors que $\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BA}-2\overrightarrow{BC}$

Exercice 6

Soit A, B et C trois points non alignés.

1. Construire H barycentre des points pondérés $(A,1)$ et $(B,3)$.
2. Construire G barycentre des points pondérés $(H,4)$ et $(C,5)$.
3. Justifier que $\overrightarrow{GA}+3\overrightarrow{GB}$ est colinéaire à $\overrightarrow{GH}$.

   En déduire que $\overrightarrow{GA}+3\overrightarrow{GB}+5\overrightarrow{GC}=\vec{0}$.
4. Soit K le barycentre des points pondérés $(A,1)$ et $(C,5)$. Montrer alors que G est le barycentre des points pondérés $(B,3)$ et $(K,6)$.

Exercice 7

Soit trois points A, B et C non alignés. On désigne par G le barycentre des points pondérés $(A,3)$, $(B,4)$ et $(C,2)$.

1. Soit H le point tel que $\overrightarrow{BH}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$. Déterminer deux nombres b et c tels que H soit le barycentre de (B,b) et (C,c).

2. Montrer alors que les points A, G et H sont alignés. Construire alors G.

3. Déterminer et construire l'ensemble E des points M du plan tels que $3\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+4\overrightarrow{MC}$ soit colinéaire à $\overrightarrow{AB}$

BARYCENTRE Corrigé

Exercice 1

Soit G le barycentre des points podérés (A, 2) et (B, - 1).

On a : $2\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GB} = \vec{0}$

En utilisant la relation de Chasles pour les vecteurs

$2\overrightarrow{GO} + 2\overrightarrow{OA} - (\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OB}) = \vec{0}$ équivaut à $\overrightarrow{GO} + 2\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \vec{0}$

équivaut à $\overrightarrow{OG} = -2\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$

Or O est le symétrique de B par A, il en résulte que $\overrightarrow{OB} = 2\overrightarrow{OA}$

d'où encore $\overrightarrow{OG} = \vec{0}$ donc G = O.

les deux coefficients 2 et -1 sont de signes contraires donc le barycentre G est à l'extérieur du segment $[AB]$.

On a : $\left\|2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}\right\| = \left\|2(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA}) - (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB})\right\| = \left\|\overrightarrow{MG} + 2\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GB}\right\| = \left\|\overrightarrow{MG}\right\| = 4$

Ainsi : $\left\|2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}\right\| = 4$ équivaut à $GM = 4$.

donc M appartient au cercle de centre G (ou O) et de rayon 4.

Exercice 2

1. G barycentre des points pondérés (A; 5) et (B; 3).

donc G est défini par $5\overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{GB} = \vec{0}$ d'où $\overrightarrow{AG} = \dfrac{3}{8}\overrightarrow{AB}$

2. H barycentre des points pondérés (A;11) et (B;−3)

donc H est défini par $11\overrightarrow{HA} - 3\overrightarrow{HB} = \vec{0}$ d'où $\overrightarrow{AH} = \dfrac{-3}{8}\overrightarrow{AB}$

D'où A est le milieu du segment [GH].

3. $\vec{u} = 5\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB}$

utilisons encore la relation de Chasles

$\vec{u} = 5(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA}) + 3(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB}) = 8\overrightarrow{MG} + 5\overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{GB} = 8\overrightarrow{MG}$

puisque par définition $5\overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{GB} = \vec{0}$

$\vec{u} = 5\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} = 8\overrightarrow{MG}$ signifie bien que $\vec{u} = 5\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB}$ est colinéaire à $\overrightarrow{MG}$

BARYCENTRE Corrigé

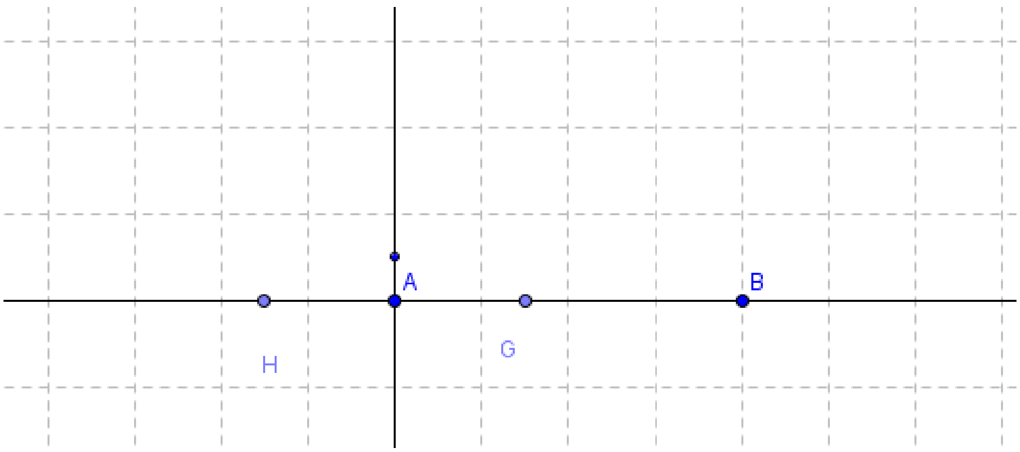
De même

$\vec{v} = 11\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} = 11(\overrightarrow{MH} + \overrightarrow{HA}) - 3(\overrightarrow{MH} + \overrightarrow{HB}) = 8\overrightarrow{MH} + 11\overrightarrow{HA} - 3\overrightarrow{HB} = 8\overrightarrow{MH}$

$\vec{v} = 11\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} = 8\overrightarrow{MH}$ signifie bien que $\vec{v} = 11\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB}$ est colinéaire à $\overrightarrow{MH}$

4. $\left\|5\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB}\right\| = \left\|11\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB}\right\| \Leftrightarrow 8\left\|\overrightarrow{MG}\right\| = 8\left\|\overrightarrow{MH}\right\|$

L'ensemble E_1 est la médiatrice du segment $[GH]$



Exercice 3

1. Il n'existe pas de barycentre pour le triplet $(A,2),(B,-1),(C,-1)$

puisque la somme des coefficients est nulle $\vec{V} = 2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}$

le point G est le centre de gravité du triangle ABC alors $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$

$\vec{V} = 2(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA}) - (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA}) - (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC}) = 2\overrightarrow{GA} - (\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}) = 2\overrightarrow{GA} - (-\overrightarrow{GA}) = 3\overrightarrow{GA}$

expression ne dépendant pas du point M donc $\vec{V}$ est un vecteur indépendant du point M.

2. $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA}) + (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB}) + (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC}) = 3\overrightarrow{MG}$ et $2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{GA}$

$$\left\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right\| = \left\|2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\right\| \Leftrightarrow 3\left\|\overrightarrow{MG}\right\| = 3\left\|\overrightarrow{GA}\right\| \Leftrightarrow \left\|\overrightarrow{MG}\right\| = \left\|\overrightarrow{GA}\right\|$$

l'ensemble des points M de E tel que $\left\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right\| = \left\|2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\right\| \Leftrightarrow GM = GA$

est le cercle de centre G et de rayon GA (ce cercle de centre G passe par A).

BARYCENTRE Corrigé

Exercice 4

1. il n' y a pas de barycentre pour les points pondérés (A, 1) , (B, 1) et (C, -2) puisque la somme des coefficients $(1+1-2=0)$ est nulle.

Ecrivons la relation de Chasles pour $\overrightarrow{MB}$ et $\overrightarrow{MC}$ en

introduisant le point A.

$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MA}+(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB})-2(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AC})=\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC}$ est un vecteur constant .

2. Puisque $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MC}$ est un vecteur constant alors en prenant M = A ou M = B

ou M = C , on obtient le même vecteur :

soit $\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BA}-2\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}$

Exercice 5

1. H barycentre de $(A,1)$ et $(B,3)$ équivant à $\overrightarrow{HA}+3\overrightarrow{HB}=\vec{0}$

équivaut à $\overrightarrow{HA}+3(\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{AB})=\vec{0}$ équivaut à $4\overrightarrow{HA}+3\overrightarrow{AB}=\vec{0}$ équivaut à $\overrightarrow{AH}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$

2. G barycentre de $(H,4)$ et $(C,5)$ équivaut à $4\overrightarrow{GH}+5\overrightarrow{GC}=\vec{0}$

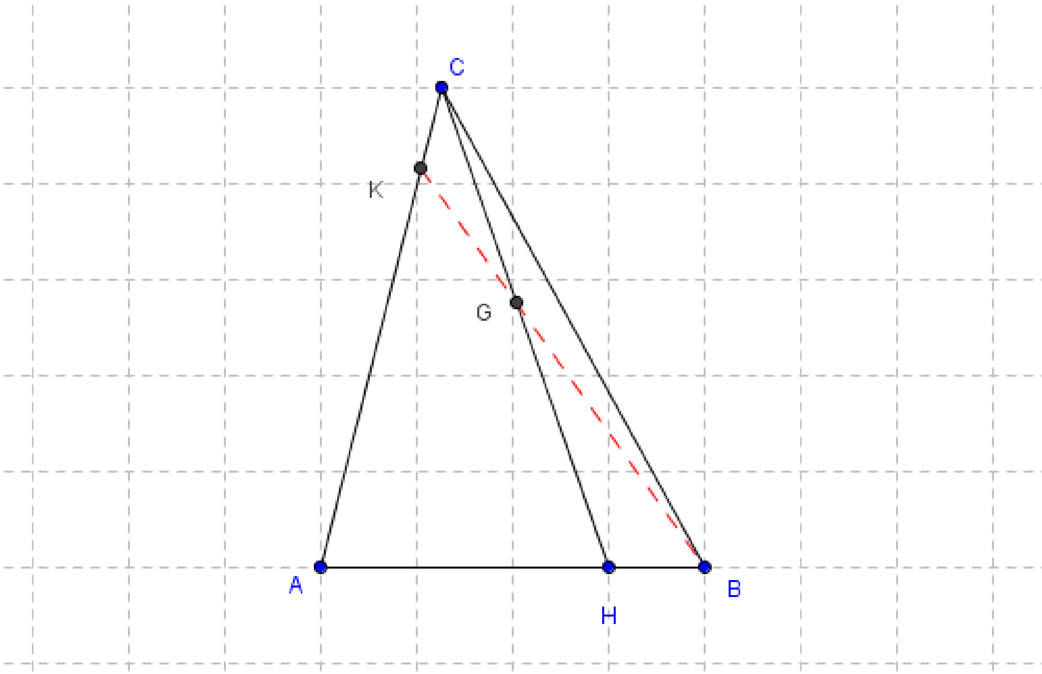
équivaut à $4\overrightarrow{GH}+5(\overrightarrow{GH}+\overrightarrow{HC})=\vec{0}$ équivaut à $9\overrightarrow{GH}+5\overrightarrow{HC}=\vec{0}$ équivaut à $\overrightarrow{HG}=\frac{5}{9}\overrightarrow{HC}$

3. Calculons $\overrightarrow{GA}+3\overrightarrow{GB}=(\overrightarrow{GH}+\overrightarrow{HA})+3(\overrightarrow{GH}+\overrightarrow{HB})=4\overrightarrow{GH}+\overrightarrow{HA}+3\overrightarrow{HB}=4\overrightarrow{GH}$

comme $4\overrightarrow{GH}+5\overrightarrow{GC}=\vec{0}$ alors $\overrightarrow{GA}+3\overrightarrow{GB}+5\overrightarrow{GC}=4\overrightarrow{GH}+5\overrightarrow{GC}=\vec{0}$

G est le barycentre de $(A,1),(B,3)$ et $(C,5)$

BARYCENTRE Corrigé



4. G appartient aux droites (CH) et (BK).

D'autre part , G est le barycentre de (A, 1) , (B, 3) et (C, 5) donc $\overrightarrow{GA}+3\overrightarrow{GB}+5\overrightarrow{GC}=\vec{0}$

Si L est le barycentre de (B,3) et (C,5) alors

$\overrightarrow{GA}+3\overrightarrow{GB}+5\overrightarrow{GC}=\vec{0}$ équivaut à $\overrightarrow{GA}+3(\overrightarrow{GL}+\overrightarrow{LB})+5(\overrightarrow{GL}+\overrightarrow{LC})=\vec{0}$

équivaut à $\overrightarrow{GA}+8\overrightarrow{GL}=\vec{0}$

Parsuite , G appartient aussi à la droite (AL).

Donc les droites (CH), (BK),(AL) sont concourantes au point G

BARYCENTRE Corrigé

Exercice 6

1. Soit H tel que $\overrightarrow{BH} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$

H barycentre de $(B,b),(C,c)$ équivaut à $b\,\overrightarrow{HB} + c\,\overrightarrow{HC} = \vec{0}$

équivaut à $\overrightarrow{BH} = \frac{c}{b+c}\,\overrightarrow{BC}$

D'où $\begin{cases} c = 1 \\ b + c = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 2 \\ c = 1 \end{cases}$

donc H barycentre de $(B,2)$ et $(C,1)$ ou encore H barycentre des points pondérés (B, 4) et (C, 2).

2. On a G est le barycentre des points pondérés $(A,3)$, $(B,4)$ et $(C,2)$
et H le point soit le barycentre de $(B,4)$ et $(C,2)$.

donc G est le barycentre des points pondérés (A, 3) et (H, 6) .

D'où les points A, G et H sont alignés et $\overrightarrow{AG} = \frac{6}{9}\overrightarrow{AH} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AH}$

3. $$\begin{aligned} 3\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 4\overrightarrow{MC} &= 3(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA}) + 2(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB}) + 4(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC}) \\ &= 9\overrightarrow{MG} + 3\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GB} + 4\overrightarrow{GC} \\ &= 9\overrightarrow{MG} \end{aligned}$$

$9\overrightarrow{MG}$ colinéaire à $\overrightarrow{AB}$ $\Leftrightarrow$ M appartient à la parallèle à la droite (AB)
et passant par le point G.

Donc (E) est la parallèle à la droite (AB) passant par G.