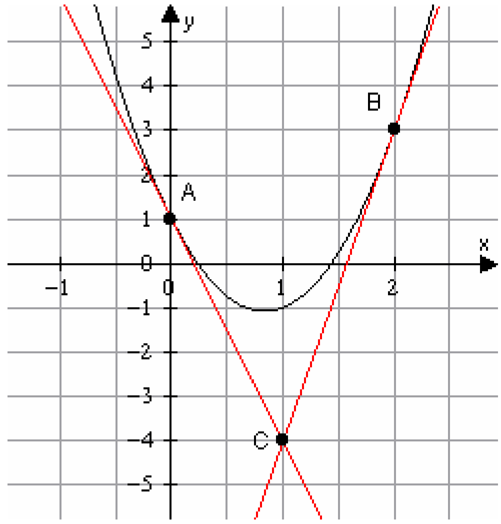
Etude de fonction

Exercice 1

On considère la fonction f définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$ dont la parabole $\mathcal{P}$ est représentée si contre.
$\mathcal{P}$ passe par les points A(0 ; 1) et B(2 ; 3)
Les tangentes à $\mathcal{P}$ aux points A et B se coupent au point C(1 ; -4)



1. Déterminer une équation des deux tangentes à $\mathcal{P}$
   En déduire $f'(0)$ et $f'(2)$
2. Exprimer $f'(x)$ en fonction de a , b et c
3. A l'aide des valeurs de $f'(0)$, $f'(2)$ et $f(0)$ trouver trois équations vérifiées par a, b et c puis déterminer l'expression algébrique de la fonction f.

Exercice 2

On considère la fonction polynôme f définie par $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x + \frac{7}{6}$

On note $\mathcal{C}$ est sa courbe représentative dans un repère orthonormé du plan.

1. Déterminer la fonction dérivée de la fonction f
2. Dresser le tableau de variation de la fonction f
3. Montrer que le point $A\left(-\frac{1}{2};\frac{9}{4}\right)$ est centre de symétrie de la courbe $\mathcal{C}$
4. Montrer que le polynôme se factorise par $(x-1)^2$
5. En déduire les abscisses des points d'intersection de $\mathcal{C}$ avec l'axe des abscisses
6. Donner une équation de la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0

Exercice 3

Soit $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction racine carrée.

On note A est le point de coordonnées (2 ; 0)

Pour x positif on note $M\left(x;\sqrt{x}\right)$ le point de $\mathcal{C}$ d'abscisse x

1. Exprimer, en fonction de x, la distance AM^2 on pourra la noter $d(x)$
2. Quel est le point de $\mathcal{C}$ qui est le plus près de A ?

   (On pourra étudier les variations de la fonction d)

Etude de fonction

Exercice 4

On considère de la fonction f définie sur $\mathbb{R}-\{-2\}$ par : $f(x)=\dfrac{x^2+3x+3}{x+2}$

Et on appelle C la courbe représentative dans un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$

1. Déterminer les réels a, b et c tels que $f(x)=ax+b+\dfrac{c}{x+2}$
2. Calculer la dérivée de f et étudier les variations de f et dresser son tableau de variation
3. Montrer que le point I(-2 ;-1) est le centre de symétrie de C

Exercice 5

On considère de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=x^3-3x^2+4$

On appelle C sa courbe représentative dans un repère orthonormé du plan.

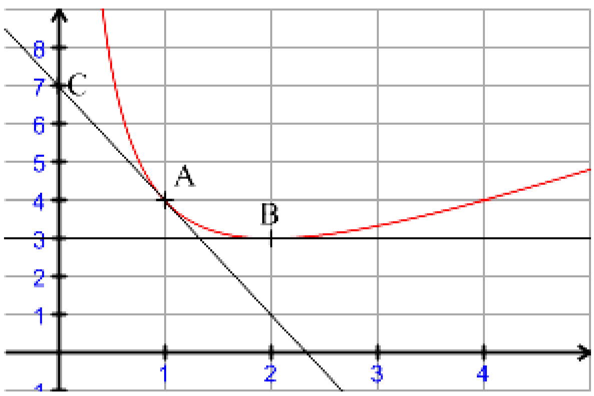
1. Etudier les variations de la fonction f
2. a)Déterminer l'équation de la tangente D à la courbe représentative de la fonction f au point d'abscisse 1

   b) Vérifier que $(x-1)^3=x^3-3x^2+3x-1$
   En déduire la position relative de C et D

Exercice 6

La courbe H représentée ci-dessous est une partie de la représentation graphique de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x)=ax+b+\dfrac{c}{x}$

où les coefficients sont à déterminer



1. Déterminer graphiquement $f(1)$, $f'(1)$, $f(2)$ et $f'(2)$
2. Déterminer $f'(x)$ en fonction de a, b et c
3. Montrer que les réels a, b et c vérifient le système : $\begin{cases} a+b+c=4 \\ a-c=-3 \\ 4a-c=0 \end{cases}$
4. Déterminer l'expression de $f(x)$

Etude de fonction

Exercice 7

On considère la fonction f définie sur $]-\infty;-2[\cup]-2;2[\cup]2;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{x^3-3x^2+12}{4-x^2}$

On désigne par $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

1. Déterminer les limites de f en -2 et 2

   Quelle conséquence graphique en tire-t-on pour $\mathcal{C}$?

2. a. Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$

   b. Déterminer les réels a, b, c et d tels que, pour tout x différent de -2 et 2,

   $$f(x)=ax+b+\frac{cx+d}{4-x^2}$$

   c. En déduire que la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = 3 - x$ est asymptote oblique à $\mathcal{C}$

   d. Etudier la position relative de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{C}$

3. a. Calculer $f'(x)$ et prouver que $f'(x)$ a le même signe que $12 - x^2$

   b. En déduire les variations de f et dresser le tableau des variations de f

4. a. Déterminer les coordonnées I, le point d'intersection de $\mathcal{D}$ et de l'axe des ordonnées.

   b. Démontrer que I est le centre de symétrie de $\mathcal{C}$.

   c. Déterminer l'équation de la tangente Δ, à $\mathcal{C}$ au point I

   d. Etudier la position relative de Δ et de $\mathcal{C}$

5. Construire $\mathcal{C}$, ses asymptotes ainsi que les tangentes horizontales.

6. Déterminer graphiquement le nombre de solutions de l'équation $f(x) = k$ où k est un réel fixé. (On discutera suivant les valeurs de k.)

7. Déterminer graphiquement le nombre de solutions de l'équation $f(x) = ax+3$ où a est un réel fixé. (On discutera suivant les valeurs de a.)

Etude de fonction

Exercice 8

On considère la fonction *f* définie sur $]-\infty;3[\cup]3;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{x^2-5x+10}{3-x}$

On désigne par C sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O,\vec{i},\vec{j})$

1. Déterminer les limites de *f* en 3. Quelle conséquence graphique en tire-t-on pour C ?

2. a. Déterminer les limites de *f* en $+\infty$ et en $-\infty$

   b. Déterminer les réels *a*, *b* et *c* tels que, pour tout *x* différent de 3, $f(x)=ax+b+\dfrac{c}{3-x}$

   En déduire que la droite D d'équation $y = 2 - x$ est asymptote oblique à C

3. On appelle I le point d'intersection des deux asymptotes de C. Démontrer que I est le centre de symétrie de C.

4. a. Calculer la dérivée f' de *f*

   b. Etudier les variations de *f* et dresser le tableau des variations de *f*

5. a. Montrer que la droite Δ, d'équation $y=3x-2$ est tangente à C au point d'abscisse 2

   b. Etudier la position relative de Δ et C

   c . Prouver qu'il existe une droite Δ' qui soit parallèle à Δ (mais différente de Δ) et qui soit tangente à C. Déterminer son équation

Etude de fonction : corrigé

Exercice 1

1. Sur le graphique nous pouvons lire que $f(0)=1$ et que le coefficient directeur de la tangente à la courbe au point A est -5, par conséquent $f'(0) = -5$

L'équation de la tangente au point d'abscisse 0 est donnée par la formule $y = f'(0)(x-0)+f(0)$;

nous obtenons ainsi : $y=-5x+1$

De même, l'équation de la tangente au point d'abscisse 2 est $y = 7x-11$

Et $f'(2) = 7$

2. Pour tout x réel , $f'(x) = 2ax+b$

3. On a le système suivant : $\begin{cases} f'(0)=-5 \\ f'(2)=7 \\ f(0)=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a\times 0+b=-5 \\ 2a\times 2+b=7 \\ a\times 0^2+b\times 0+c=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=-5 \\ 4a+b=7 \\ c=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=-5 \\ a=3 \\ c=1 \end{cases}$

donc $f(x) = 3x^2-5x+1$

Exercice 2

1. f est une fonction polynôme elle est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = \frac{1}{3}\times 3x^2+\frac{1}{2}\times 2x-2 \ = x^2+x-2$$

2. Pour obtenir les variations de la fonction f, il suffit d'étudier le signe de f'

C'est un polynôme du second degré, cherchons ses éventuelles racines en calculant son discriminant : $\Delta = b^2-4ac = 1^2 - 4\times 1\times(-2) = 9 = 3^2$

Ses racines sont donc : $x_1 = \frac{-1-3}{2} = -2$ et $x_2 = \frac{-1+3}{2} = 1$

Et comme le coefficient du terme de plus haut degré est positif on a le tableau suivant :

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$4{,}5$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Etude de fonction : corrigé

3. Le domaine de définition est $\mathbb{R}$ il est donc symétrique par rapport à $-\frac{1}{2}$

$$f\left(-1-x\right)=\frac{1}{3}\left(-1-x\right)^3+\frac{1}{2}\left(-1-x\right)^2-2\left(-1-x\right)+\frac{7}{6}$$

$$=-\frac{1}{3}-x-x^2-\frac{x^3}{3}+\frac{1}{2}+x+\frac{1}{2}x^2+2+2x+\frac{7}{6}$$

$$=-\frac{x^3}{3}-\frac{1}{2}x^2+2x+\frac{10}{3}$$

Donc : $f\left(-1+h\right)+f(x)=-\frac{x^3}{3}-\frac{1}{2}x^2+2x+\frac{10}{3}+\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-2x+\frac{7}{6}=\frac{9}{2}$

On peut donc affirmer que le point $A\left(-\frac{1}{2};\frac{9}{4}\right)$ est centre de symétrie de la courbe $\mathcal{C}$

4. Pour montrer que le polynôme se factorise par $(x-1)^2$, cherchons deux réel a et b tels que :

$f(x)=(ax+b)(x-1)^2$

$$(ax+b)(x-1)^2=(ax+b)(x^2-2x+1)=ax^3+bx^2-2ax^2-2bx+ax+b$$

$$=ax^3+(b-2a)x^2+(-2b+a)x+b$$

Par identification avec l'expression initiale on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} a=\frac{1}{3} \\ b-2a=\frac{1}{2} \\ -2b+a=-2 \\ b=\frac{7}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\frac{1}{3} \\ \frac{7}{6}-2\frac{1}{3}=\frac{1}{2} \\ -2\frac{7}{6}+\frac{1}{3}=-2 \\ b=\frac{7}{6} \end{cases}$$ les deux équations centrales sont vérifié donc

$$f(x)=\left(\frac{1}{3}x+\frac{7}{6}\right)(x-1)^2=\frac{1}{3}\left(x+\frac{7}{2}\right)(x-1)^2$$

5. Les abscisses des points d'intersection de $\mathcal{C}$ avec l'axe des abscisses sont les réels x qui vérifient : $f(x)=0$

$$f(x)=0 \Leftrightarrow \frac{1}{3}\left(x+\frac{7}{2}\right)(x-1)^2=0 \Leftrightarrow x=-\frac{7}{2} \text{ ou } x=1$$

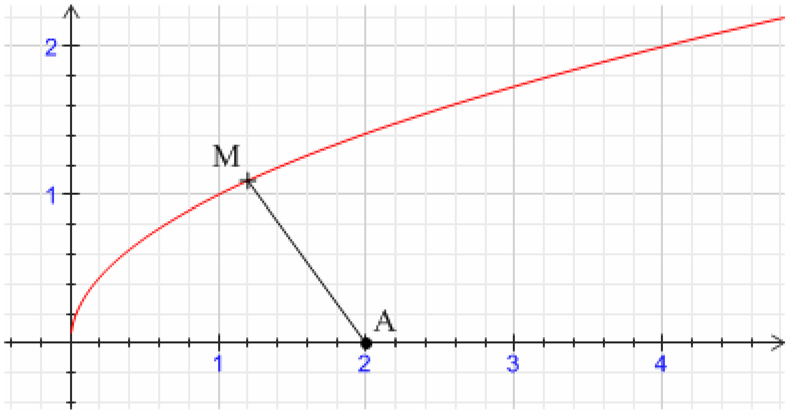
6. L'équation de la tangente au point d'abscisse 0 est donnée par la formule $y=f'(0)\left(x-0\right)+f(0)$

or $f(0)=\frac{7}{6}$ et $f'(0)=-2$

L'équation s'écrit donc $y=-2\left(x-0\right)+\frac{7}{6} \Leftrightarrow y=-2x+\frac{7}{6}$

Etude de fonction : corrigé

Exercice 3



1. $d(x)=AM^2=(x_M-x_A)^2+(y_M-y_A)^2=(x-2)^2+(\sqrt{x}-0)^2=x^2-3x+4$

2. La fonction d est une fonction polynôme, elle est définie et dérivable sur $[0\,;+\infty[$

et pour tout réel x on a : $d'(x)=2x-3$. On a donc le tableau de variation :

x	0		$3/2$		$+\infty$
$d'(x)$		$-$	0	$+$	
$d(x)$	4	$\searrow$	$7/4$	$\nearrow$	$+\infty$

Le point de C qui est le plus prés de A est le point B qui a pour abscisse $\frac{3}{2}$ et comme il est sur la courbe d'équation $y=\sqrt{x}$, il a pour corrdonnées : $B\left(\frac{3}{2};\sqrt{\frac{3}{2}}\right)$

Exercice 4

1. Pour tout x réel différent de -2 :

$$f(x)=ax+b+\frac{c}{x+2}=\frac{(ax+b)(x+2)+c}{x+2}=\frac{ax^3+(2a+b)x+(2b+c)}{x+2}$$

Or $f(x)=\dfrac{x^2+3x+3}{x+2}$ Il suffit d'identifier les coefficients de chaque monôme :

$$\begin{cases} a=1 \\ 2a+b=3 \\ 2b+c=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ 2+b=3 \\ 2b+c=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=1 \\ 2+c=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=1 \\ c=1 \end{cases}$$

. Par conséquent $f(x)=x+1+\dfrac{1}{x+2}$

Etude de fonction : corrigé

2. *Pour calculer la dérivée de f, on peut prendre la forme initiale, mais il est plus simple de prendre la forme développée obtenue à la question 1 :*

L'expression $\frac{1}{x+2}$ est de la forme $\frac{1}{u(x)}$ or $\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$ donc

Pour tout réel x, $x \neq 2$, $\quad f'(x) = 1 - \frac{1}{(x+2)^2}$

Pour étudier le signe de $f'(x)$, il faut factoriser :

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{(x+2)^2} = \frac{(x+2)^2 - 1^2}{(x+2)^2} = \frac{(x+1)(x+3)}{(x+2)^2}$$

Pour étudier les variation de f, étudions le signe de $f'(x)$

Le dénominateur étant un carré, il est toujours positif, donc $f'(x)$ a le même signe que le numérateur qui est un trinôme du second degré qui s'annule et change de signe en -3 et -1.

On a donc le tableau suivant :

x	$-\infty$		-3		2		-1		$+\infty$
$f(x)$		+	0	–	‖	–	0	+	
$f'(x)$	$-\infty$ ↗		-3	↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	1	↗	$+\infty$

3. Le domaine de définition est $\mathbb{R} - \{-2\}$ est donc symétrique par rapport à - 2

De plus, pour tout réel x non nul, nous avons :

$$f(-4-x) = -4 - x + 1 + \frac{1}{-4-x+2} = -3 - x + \frac{1}{x+2}$$

Par conséquent on a, $f(-4-x) + f(x) = x - 3 + \frac{1}{x+2} + x + 1 + \frac{1}{x+2} = -2$

On peut donc affirmer que le point $A(-2;-1)$ est centre de symétrie de la courbe $\mathcal{C}$

Etude de fonction : corrigé

Exercice 5

1. f est une fonction polynôme, elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = 3x^2 - 6x \;= 3x(x-2)$$

La dérivée est un trinôme du second degré qui s'annule et change de signe en 0 et en 2 :

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f'(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

2.a) L'équation de la tangente au point d'abscisse 1 est de la forme :

$$y = f'(1)(x-1) + f(1)$$

or $f(1) = 1^3 - 3\times 1^2 + 4 = 2$ et $f'(1) = 3\times 1^2 - 6\times 1 = -3$

donc $\quad y = -3(x-1)+2 \quad$ ou encore $\quad y = -3x+5$

L'équation de la tangente au point d'abscisse 1 est donc $y = -3x+5$

2.b) On a donc $(x-1)^3 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$

Pour étudier la position relative de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$, étudions le signe de la différence :

$$f(x) - (-3x+5) = \left(x^3 - 3x^2 + 4\right) - (-3x+5) \;= x^3 - 3x^2 + 3x - 1 \;= (x-1)^3$$

Or $(x-1)^3$ a le même signe que $x-1$, on a donc :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f(x)-(-3x+5)$		$-$	0	$+$	
Position relative		$\mathcal{D}$ est en dessus de $\mathcal{C}$	$\mathcal{D}$ coupe $\mathcal{C}$	$\mathcal{D}$ est en dessous de $\mathcal{C}$	

Etude de fonction : corrigé

Exercice 6

1. La courbe passe par le point A(1 ; 4) donc $f(1)=4$

La tangente à la courbe au point A a pour coefficient directeur -3 donc $f'(1)=-3$

La courbe passe par le point B(2 ; 3) donc $f(2)=3$

La tangente à la courbe au point B a pour coefficient directeur 0 donc $f'(2)=0$

2. $f(x)=ax+b+\frac{c}{x}$ or nous savons que la dérivée de la fonction $x\mapsto\frac{1}{x}$ est la fonction $x\mapsto-\frac{1}{x^2}$ donc pour tout réel non nul, $f'(x)=a-\frac{c}{x^2}$

3. On a $\begin{cases} f(1)=4 \\ f'(1)=-3 \\ f'(2)=0 \end{cases}$ donc les réels a, b et c vérifient :

$$\begin{cases} a+b+c=4 \\ a-c=-3 \\ a-\frac{c}{4}=0 \end{cases} \text{ c'est à dire } \begin{cases} a+b+c=4 \\ a-c=-3 \\ 4a-c=0 \end{cases}$$

4. On peut soustraire les deux dernières lignes pour éliminer le « c »

$$\left|\begin{array}{l} \\ \\ L3-L2 \end{array}\right. \begin{cases} a+b+c=4 \\ a-c=-3 \\ 3a=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1+b+c=4 \\ 1-c=-3 \\ a=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1+b+4=4 \\ c=4 \\ a=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=-1 \\ c=4 \\ a=1 \end{cases}$$

Par conséquent, pour tout réel non nul, $f(x)=x-1+\frac{4}{x}$

Exercice 7

1.

$\lim_{x\to-2^+}(x^3-3x^2+12)=-8$ et $\lim_{x\to-2^+}(4-x^2)=0^+$ donc $\lim_{x\to-2^+}f(x)=-\infty$

$\lim_{x\to-2^-}(x^3-3x^2+12)=-8$ et $\lim_{x\to-2^-}(4-x^2)=0^-$ donc $\lim_{x\to-2^-}f(x)=+\infty$

On obtient de même : $\lim_{x\to2^-}f(x)=+\infty$ et $\lim_{x\to2^+}f(x)=-\infty$

On en déduit que les droites d'équations $x=-2$ et $x=2$ sont deux asymptotes verticales de la courbe C.

Etude de fonction : corrigé

2. a) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^3}{-x^2} = \lim\limits_{x \to +\infty} -x = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^3}{-x^2} = \lim\limits_{x \to -\infty} -x = +\infty$

b) pour tout x différent de 2 et de -2, on a :

$$ax+b+\frac{cx+d}{4-x^2}=\frac{(ax+b)(4-x^2)}{4-x^2}+\frac{cx+d}{4-x^2}=\frac{-ax^3-bx^2+(4a+c)x+(4b+d)}{4-x^2} \quad \text{or} \quad f(x)=\frac{x^3-3x^2+12}{4-x^2}$$

Par identification on trouve:

$$\begin{cases} -a=1 \\ -b=-3 \\ 2a+c=0 \\ 2b+d=12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=3 \\ 4a+c=0 \\ 4b+d=12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=3 \\ -4+c=0 \\ 12+d=12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=3 \\ c=4 \\ d=0 \end{cases}$$

Donc pour tout x différent de 2 et de -2, on a : $f(x)=3-x+\dfrac{4x}{4-x^2}$

- La différence $f(x)-(3-x)$ vaut $\dfrac{4x}{4-x^2}$ or $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{4}{4-x^2} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{4}{-x^2} = 0$

Nous pouvons en déduire que la droite d'équation $y = 3 - x$ est asymptote oblique à $\mathcal{C}$ au voisinage de $+\infty$

On peut prouver de la même façon qu'il en est de même au voisinage de $-\infty$

- La différence $f(x)-(3-x)$ vaut $\dfrac{4x}{4-x^2}$, le dénominateur $4-x^2=(2-x)(2+x)$ est un trinôme du second degré qui s'annule en 2 et -2 et dont le coefficient du x^2 est négatif

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$4x$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$4-x^2$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
$f(x)-(3-x)$		$+$	‖	$-$	0	$+$	‖	$-$	
Position relative de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{C}$		$\mathcal{C}$ est au-dessus de $\mathcal{D}$	‖	$\mathcal{C}$ est au-dessous de $\mathcal{D}$		$\mathcal{C}$ est au-dessus de $\mathcal{D}$	‖	$\mathcal{C}$ est au-dessous de $\mathcal{D}$	

$\mathcal{C}$ coupe $\mathcal{D}$

3.a. f est unefonction rationelle donc f est dérivable sur Df . Pour tout x de Df,

$$f'(x) = \frac{(3x^2-6x)(2-x^2)-(x^3-3x^2+12)(-4x)}{(2 - x)^2} = \frac{-x^4+12x^2}{(2-{}^2)^2} = \frac{x^2(12-x^2)}{(2-x^2)^2}$$

b. $f'(x)$ a donc le signe du trinôme $12 - x^2$ qui s'annule en $\sqrt{12}=2\sqrt{3}$ et en $-\sqrt{12}=-2\sqrt{3}$

Etude de fonction : corrigé

On a donc le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		$-2\sqrt{3}$		-2		0		2		$2\sqrt{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	‖	$+$	0	$+$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$f(-2\sqrt{3})$	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	3	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$f(2\sqrt{3})$	↘	$-\infty$

Avec $f(-2\sqrt{3}) = 3\sqrt{3}+3 \approx 8,2$ et $f(2\sqrt{3}) = -3\sqrt{3}+3 \approx -2,2$

4. I est le point d'intersection de D et de l'axe des ordonnées, ses coordonnées (x ; y) vérifient donc :

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = f(0) = 3 \end{cases}$$

I a donc pour coordonnées (0 ; 3)

- Le domaine de définition $\mathbb{R} - \{-2\,;2\}$ est symétrique par rapport à 0
- Pour tout x, réel différent de 2 et de -2 : $f(0-x) = f(-x) = 3-(-x)+\dfrac{4(-x)}{4-(-x)^2} = 3+x-\dfrac{4x}{4-x^2}$

$$\frac{f(x) \quad + f(-x)}{2} = \frac{1}{2}\left(3-x+\frac{4x}{4-x^2}+3+x-\frac{4x}{4-x^2}\right) = \frac{1}{2}\times 6 = 3$$

On peut donc en déduire que I(0 ; 3) est le centre de symétrie de la courbe C

c. L'équation de la tangente au point d'abscisse a s'écrit $y = f'(a)(x-a)+f(a)$

Calculons $f'(0) = \dfrac{0^2(12-0^2)}{(2-0^2)^2} = 0$ et $f(0) = \dfrac{0^3-30^2+12}{4-0^2}$ =3

L'équation de la tangente au point d'abscisse 0 est donc $y = 0(x-0)+3$ c'est à dire $y = 3$

d. La position relative de Δ et de C est donnée par le signe de la différence $f(x)-3$

cette différence vaut: $f(x) - 3 = 3-x+\dfrac{4x}{4-x^2}-3 = ... = \dfrac{x^3}{4-x^2}$

Le numérateur a le même signe que x et le signe du dénominateur a déjà été étudié:

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
x^3		$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	
$4-x^2$		$-$	0	$+$	|	$+$	0	$-$	
$f(x)-3$		$+$	‖	$-$	0	$+$	‖	$-$	
Position relative de Δ *et* C		C est au-dessus de Δ	‖	C est au-dessous de Δ	C coupe Δ	C est au-dessus de Δ	‖	C est au-dessous de Δ	

5. *Graphique en annexe*

Etude de fonction : corrigé

6. On peut remarquer graphiquement que :

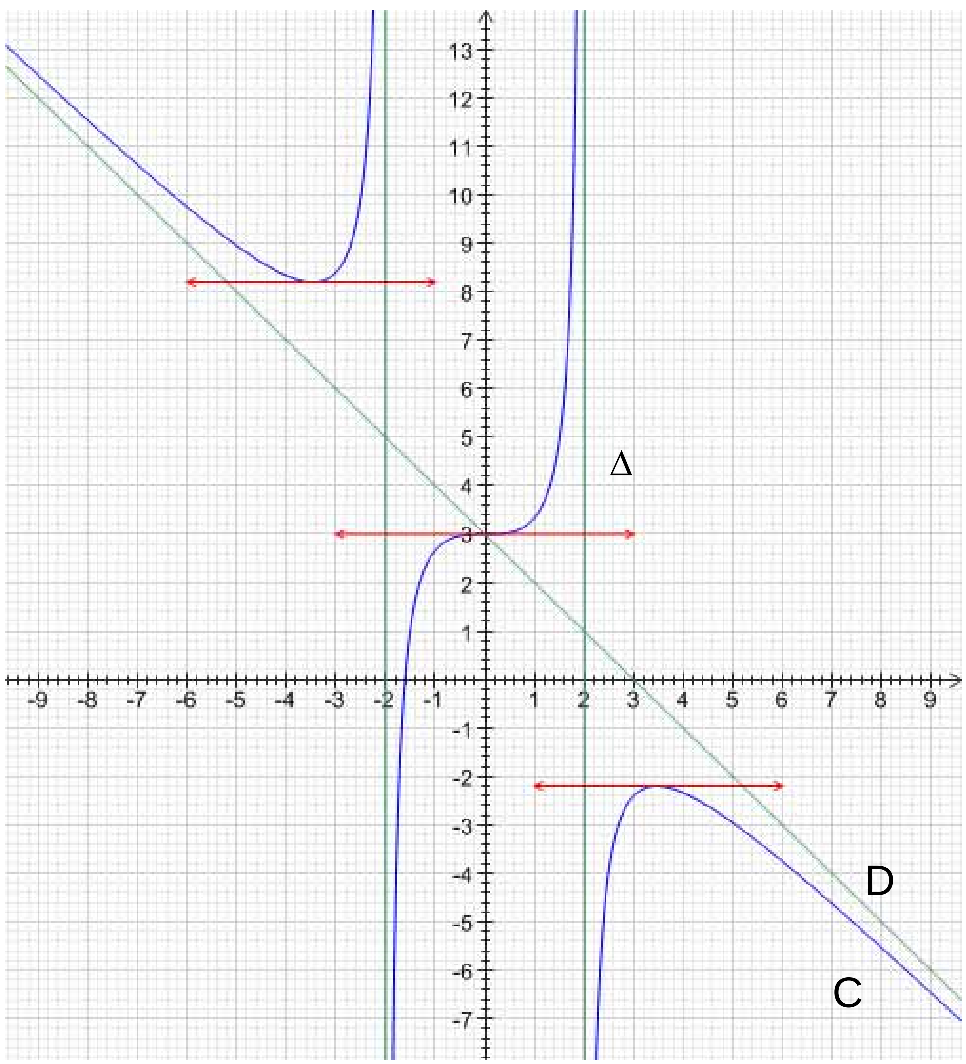
- Lorsque $k \in \left]-\infty\ ;\ f(2\sqrt{3})\right[\cup \left]f(-2\sqrt{3})\ ;+\infty\right[$, l'équation $f(x)=k$ a trois solutions car la droite d'équation $y = k$ coupe trois fois la courbe
- Lorsque $k= f(2\sqrt{3})$ ou $k= f(-2\sqrt{3})$, l'équation $f(x) =k$ a deux solutions,
- Lorsque $k \in \left]f(2\sqrt{3})\ ;\ f(-2\sqrt{3})\right[$, l'équation $f(x) =k$ n'a qu'une solution

7. Pour tout réel a, la droite d'équation $y = ax+3$ passe par I car $3 = a\text{x}0+3$ a.

L'équation $f(x) = ax+3$ a donc toujours au moins une solution : $x = 0$.

On peut remarquer graphiquement que :

- Lorsque $a \in \left]-\infty\ ;-1\right[$, l'équation $f(x) = ax+3$ n'a qu'une solution,
- Lorsque $a=0$, l'équation $f(x) = ax+3$ a deux solutions,
- Lorsque $a \in \left]0;+\infty\right[$, l'équation $f(x) = ax+3$ a trois solutions



annexe

Etude de fonction : corrigé

Exercice 8

Partie A

1. $\lim\limits_{x \to 3^+} (x^2 - 5x + 10) = 4$ et $\lim\limits_{x \to 3^+} (3 - x) = 0^-$ donc $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to 3^-} (x^2 - 5x + 10) = 4$ et $\lim\limits_{x \to 3^-} (3 - x) = 0^+$ donc $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = +\infty$

Nous pouvons en déduire que la droite d'équation x=3 est asymptote à la courbe C

2. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2}{-x} = \lim\limits_{x \to +\infty} -x = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2}{-x} = \lim\limits_{x \to -\infty} -x = -\infty$

b. $ax + b + \dfrac{c}{2-x} = \dfrac{(ax+b)(3-x)}{3-x} + \dfrac{c}{3-x} = \dfrac{-ax^2 + (3a-b)x + 3b + c}{3-x}$ or $f(x) = \dfrac{x^2 - 5x + 10}{3-x}$

Par identification on trouve: $\begin{cases} -a = 1 \\ 3a - b = -5 \\ 3b + c = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ -3 - b = -5 \\ 3b + c = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 2 \\ 6 + c = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 2 \\ c = 4 \end{cases}$

Donc pour tout x différent de 3, on a $f(x) = -x + 2 + \dfrac{4}{3-x}$

- On a $f(x) - (-x+2) = \dfrac{4}{3-x}$

or $\lim\limits_{x \to +\infty} (3-x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} (3-x) = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{4}{3-x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{4}{3-x} = 0$

Nous pouvons en déduire que la droite d'équation $y = 2x - 3$ est asymptote oblique à C

- $f(x) - (-x+2) = \dfrac{4}{3-x}$, elle a le même signe que $3 - x$ donc

Sur $]-\infty\,;3[$, cette différence est positive donc la courbe C est au- dessus de la droite D .
Sur $]\,3\,;+\infty\,;[$, cette différence est négative donc la courbe C est au-dessous de la droite D.

3. I est l'intersection des deux asymptotes, ses coordonnées (x ; y) vérifient donc : $\begin{cases} x = 3 \\ y = -x + 2 \end{cases}$

I a donc pour coordonnées $(\ 3\ ;\ -1\ )$

- Le domaine de définition $\mathbb{R} - \{3\}$ est symétrique par rapport à 3

- Pour tout x de $\mathbb{R} - \{3\}$: $f(6 - x) = x - 4 + \dfrac{4}{-3+x}$

$f(6 - x) + f(x) = x - 4 + \dfrac{4}{-3+x} - x + 2 + \dfrac{4}{3-x} = -2$

On peut donc en déduire que I est le centre de symétrie de la courbe C

4.a. f est une somme de fonctions dérivables dont un des termes est de la forme $\dfrac{4}{u}$

donc pour tout x de Df, $f\,'(x) = -1 - \dfrac{4u'(x)}{(u(x))^2} = -1 - \dfrac{4 \times (-1)}{(3-x)^2} = \dfrac{-(3-x)^2 + 4}{(3-x)^2} = \dfrac{-x^2 + 6x - 5}{(3-x)^2}$

Etude de fonction : corrigé

b. $f\,'(x)$ a le signe de $-x^2+6x-5$ qui s'annule en : $\dfrac{-6-4}{-2}=5$ et $\dfrac{-6+4}{-2}=1$

On a donc le tableau de signes et de variations suivant :

x	$-\infty$		1		3		5		$+\infty$
$f\,'(x)$		$-$	0	$+$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	3	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	-5	↘	$-\infty$

5.a. L'équation de la tangente au point d'abscisse a s'écrit $y=f\,'(a)(x-a)+f(a)$

Calculons $f'(2)=\dfrac{-2^2+6\times2-5}{(3-2)^2}=3$ et $f(2)=\dfrac{2^2-5\times2+10}{3-2}=4$

L'équation de la tangente au point d'abscisse 2 est donc $y=3(x-2)+4$ c'est à dire $y=3x-2$

La droite Δ, d'équation $y=3x-2$ est donc la tangente à C au point d'abscisse 2

b. La position relative de Δ et C est donnée par le signe de la différence $d(x)=f(x)-(3x-2)$

Cette différence vaut : $d(x)=2-x+\dfrac{4}{3-x}-(3x-2)=4-4x+\dfrac{4}{3-x}=\dfrac{(4-4x)(3-x)+4}{3-x}$

$$d(x)=\frac{4x^2-16x+16}{3-x}=\frac{(2x-4)^2}{3-x}=\frac{2(x-2)^2}{3-x}$$

Le numérateur étant un carré, il est toujours positif, la différence a donc le signe de $3-x$ qui s'annule en 3

x	$-\infty$		2		3		$+\infty$
$2(x-2)^2$		$+$	0	$+$		$+$	
$3-x$		$+$		$+$	0	$-$	
$f(x)-(3x-2)$		$+$		$+$	‖	$-$	
Position relative de D et C		C est au-dessus de D		C est au-dessus de D	‖	C est au-dessous de D	

D est tangent à C

c. Le coefficient directeur de la tangente en x_0 est $f'(x_0)$

Pour trouver les droites parallèles à Δ et qui sont tangentes à C, il suffit de résoudre l'équation $f'(x)=3$

Pour tout x différent de 3, on a les équivalences suivantes $\dfrac{-x^2+6x-5}{(3-x)^2}=3 \Leftrightarrow -x^2+6x-5=3(3-x)^2$

$$\Leftrightarrow -x^2+6x-5=27-18x+3x^2 \Leftrightarrow -4x^2+24x-32=0 \Leftrightarrow x^2-8x+4=0$$

On obtient donc un équation du second degré, on calcule le discriminant puis les racines (*à détailler*)

$x=2$ ou $x=4$

On détermine, comme à la question a, l'équation de la tangente au point d'abscisse4

Calculons $f'(4)=3$ (puisque 4 est une solution) et $f(4)=-6$

L'équation de la tangente au point d'abscisse 2 est donc $y=3(x-4)-6$ c'est à dire $y=3x-18$

La droite Δ' a donc pour équation $y=3x-18$