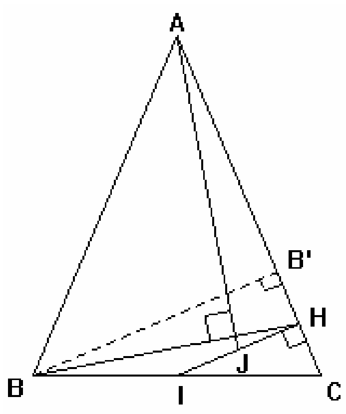
Produit dans le plan

Exercice 1



ABC est un triangle isocèle de somme principal A

et I le milieu du segment [BC].

H est le projeté orthogonal de I sur [AC] et J le milieu de [IH] .

On cherche à établir que : (AJ) et (BH) sont orthogonales.

1. Justifier les égalités : $\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{CH}\cdot\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{CH}\cdot\overrightarrow{AH}$
2. Soit B' le projeté orthogonal de B sur (AC), montrer que : $\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{HC}\cdot\overrightarrow{AH}$
3. Prouver que $\overrightarrow{AJ}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{AH}\right)$ et utiliser les questions précédentes pour répondre au problème.

Exercice 2

1. Montrer que $x^2+y^2-6x+2y-15=0$ est l'équation d'un cercle $\mathcal{C}$ dont on précisera le centre Ω et le rayon
2. a) Vérifier que A(0,3) est sur le cercle $\mathcal{C}$

   b) Déterminer une équation cartésienne de la droite $\mathcal{D}$ tangente à $\mathcal{C}$ au point A
3. Soit B le point de coordonnées (14;-3). On se propose de déterminer les équations des droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ tangentes à $\mathcal{C}$ respectivement en A_1 et A_2

   a) Montrer que A_1 et A_2 sont sur le cercle $\mathcal{C}''$de diamètre [BΩ]

   b) Déterminer une équation du cercle $\mathcal{C}''$

   c) Déterminer les coordonnées de A_1 et A_2 puis les équations cherchées

Produit dans le plan

Exercice 3

Soit le triangle équilatéral ABC de côté 4 et k un réel tel que $0 < k < 1$.

On appelle M le point du segment [AB] tel que $\overrightarrow{BM} = k\overrightarrow{BA}$

On appelle N le point du segment [BC] tel que $\overrightarrow{BN} = k\overrightarrow{BC}$

1. Faire une figure en prenant $k = \frac{1}{4}$
2. Justifier que $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 8$
3. Exprimer les vecteurs $\overrightarrow{AN}$ et $\overrightarrow{CM}$ en fonction de $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BC}$.
4. Montrer que $\overrightarrow{AN} \cdot \overrightarrow{CM} = 8k^2 - 32k + 8$
5. En déduire la ou les valeurs de k pour lesquelles les droites (AN) et (CM) sont perpendiculaires .

Exercice 4

On considère les points $A(0\ ;\ -1)$, $B(4\ ;3)$, $C(2\ ;\ -5)$

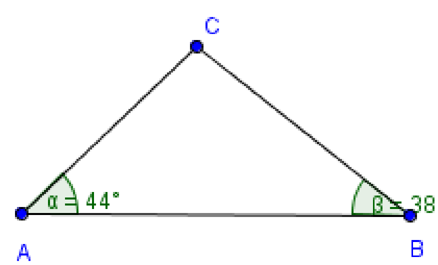
1. Déterminer les équations des médiatrices $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ respectivement des segments [AC] et [AB]
2. En déduire les coordonnées de I centre du cercle $\mathcal{C}$ circonscrit au triangle ABC.
3. Déterminer une équation du cercle $\mathcal{C}$.

Exercice 5

ABC est triangle tel que :

AB = 80,42 m , α = 44° , β = 38°

Calculer AC au cm près par excès.



Exercice 6

ABC est un triangle tel que AB = 5, AC = 6 et BC=7.

A',B' et C' sont les milieux respectifs des côtés [BC],[AC] et [AB] .

Calculer la longueur la médiane AA' et une mesure de l'angle $\widehat{BAC}$.

Produit dans le plan: corrigé

Exercice 1

1. $\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{AI}=(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CH})\cdot\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{CH}\cdot\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{CH}\cdot\overrightarrow{AI}$

Car la médiane (AI) est aussi une hauteur donc (BC) $\perp$(AI) ou encore $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AI}=0$

H est le projeté orthogonal de I sur la droite (AC) donc (HI) est perpendiculaire à (AC) = (HC)

d'où $\overrightarrow{CH}\cdot\overrightarrow{HI}=0$. Il en résulte ainsi que :

$\overrightarrow{CH}\cdot\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{CH}\cdot(\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{HI})=\overrightarrow{CH}\cdot\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{CH}\cdot\overrightarrow{HI}=\overrightarrow{CH}\cdot\overrightarrow{AH}$

2. $\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{AH}=(\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{B'H})\cdot\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{BB'}\cdot\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{B'H}\cdot\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{B'H}\cdot\overrightarrow{AH}$

$\overrightarrow{BB'}\cdot\overrightarrow{AH}=0$ car B' étant projeté de B sur (AC), on a (BB')$\perp$(AH)

De plus, dans le triangle BB'C, la droite passe par le milieu du côté [BC] et est parallèle à la (BB') ,

nous pouvons en déduire que H est le milieu du côté [B'C] donc $\overrightarrow{B'H}=\overrightarrow{HC}$

Par conséquent, $\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{B'H}\cdot\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{CH}\cdot\overrightarrow{AH}$

3. J est le milieu de [IH] donc $\overrightarrow{AJ}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{AH}\right)$

Calculons le produit scalaire : $\overrightarrow{AJ}\cdot\overrightarrow{BH}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{AH}\right)\cdot\overrightarrow{BH}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{BH}+\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BH}\right)$

En utilisant les questions précédentes on obtient :

$$\overrightarrow{AJ}\cdot\overrightarrow{BH}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{CH}\cdot\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{HC}\cdot\overrightarrow{AH}\right)=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{CH}+\overrightarrow{HC}\right)\cdot\overrightarrow{AH}=\frac{1}{2}\vec{0}\cdot\overrightarrow{AH}=0$$

Nous pouvons en déduire que les droite (AJ) et (BH) sont perpendiculaires.

Produit dans le plan: corrigé

Exercice 2

1. Il faut écrire l'équation cartésienne du cercle :

$x^2+y^2-6x+2y-15=0 \Leftrightarrow (x-3)^2+(y+1)^2-9-1-15=0 \Leftrightarrow (x-3)^2+(y+1)^2=25$

Le cercle C a pour centre le point $\Omega(3\,;\,-1)$ et pour rayon $\sqrt{25}=5$

2. a) $0^2+3^2-6\text{x}0+2\text{x}3-15=0$ donc A(0 ; 3) est sur le cercle

b) La tangente en A est perpendiculaire au rayon [AΩ] donc

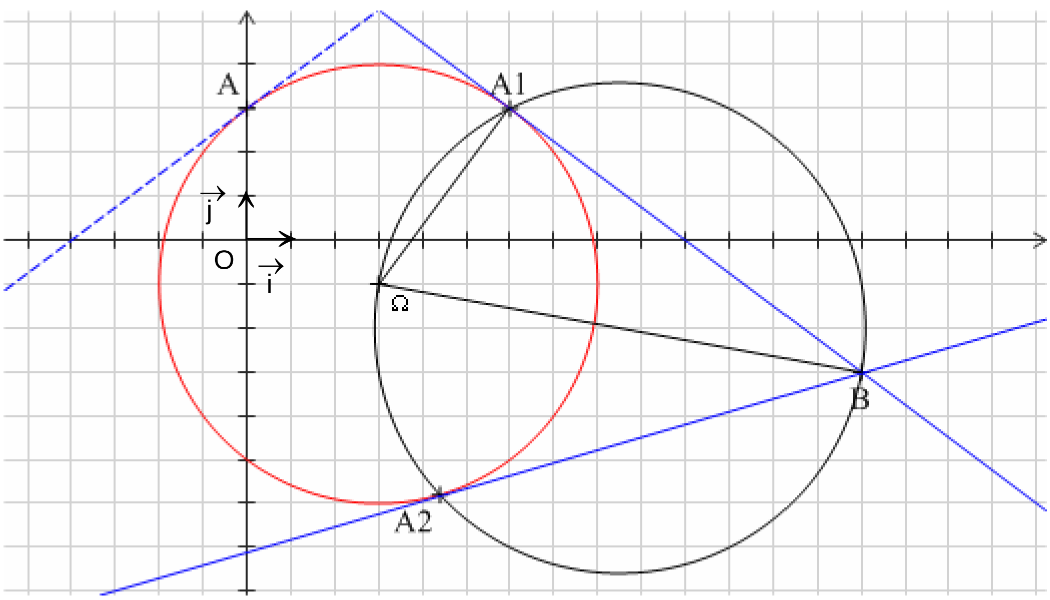
On a $\overrightarrow{A\Omega}(3;-4)$ et $\overrightarrow{AM}(x;y-3)$, M(x ;y)∈ D $\Leftrightarrow \overrightarrow{A\Omega}\cdot\overrightarrow{AM}=0$

$\Leftrightarrow 3x-4(y-3)=0$

$\Leftrightarrow 3x-4y+12=0$

Une équation cartésienne de D est $3x-4y+12=0$

3. a) Une tangente est toujours perpendiculaire au rayon donc $BA_1\Omega$ et $BA_2\Omega$ sont des triangles rectangles en A_1 et A_2 or le cercle circonscrit à un triangle rectangle a pour diamètre son hypoténuse par conséquent A_1 et A_2 sont sur le cercle C'' de diamètre [BΩ]



Produit dans le plan: corrigé

b) On a : $\overrightarrow{BM}\begin{pmatrix} x-14 \\ y+3 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\Omega M}\begin{pmatrix} x-3 \\ y+1 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} M(x\,;y)\in C'' &\Leftrightarrow \overrightarrow{BM}\perp\overrightarrow{\Omega M} \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{BM}\cdot\overrightarrow{\Omega M}=0 \\ &\Leftrightarrow (x-14)(x-3)+(y+3)(y+1)=0 \\ &\Leftrightarrow x^2+y^2-17x+4y+45=0 \end{aligned}$$

c) Les coordonnées de A_1 et A_2 sont les solutions du syctème :

$$\begin{cases} x^2+y^2-6x+2y-15=0 \\ x^2+y^2-17x+4y+45=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2-6x+2y-15=0 \\ 11x-2y-60=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2-6x+2y-15=0 \\ \dfrac{11x-60}{2}=y \end{cases}$$

En remplaçant y dans la première équation par $\dfrac{11x-60}{2}$, on obtient :

$$x^2+\left(\frac{11x-60}{2}\right)^2-6x+2\left(\frac{11x-60}{2}\right)-15=0 \Leftrightarrow \frac{125}{4}x^2-325x+825=0$$

$$\Leftrightarrow 5x^2-52x+132=0$$

On calcule de discriminant et les deux racines : $\Delta=b^2-ac=(-52)^2-4\text{x}5\text{x}132=64=8^2$

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{52-8}{10}=4,4 \text{ et } x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{52+8}{10}=6$$

Il reste à trouver les ordonnées en utilisant l'équation 2 :

$$y_1=\frac{11x_1-60}{2}=-5,8 \qquad \text{et } y_2=\frac{11x_2-60}{2}=3$$

Les deux cercles sont sécants en deux points : $A_1(\,4,4\,;-5,8\,)$ et $A_2(\,6\,;3\,)$

Produit dans le plan: corrigé

Il reste à déterminer les équations des tangentes.

On a : $\overrightarrow{\Omega A_1}\begin{pmatrix}\frac{7}{5}\\ -\frac{24}{5}\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{A_1M}\begin{pmatrix}x-\frac{22}{5}\\ y+\frac{29}{5}\end{pmatrix}$

$M(x;y)\in D_1 \Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega A_1}\cdot\overrightarrow{A_1M}=0 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{7}{5}\left(x-\frac{22}{5}\right)-\frac{24}{5}\left(y+\frac{29}{5}\right)=0 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{7}{5}x-\frac{24}{5}y-34=0$

Une équation cartésienne de D_1 est $7x-24y-170=0$

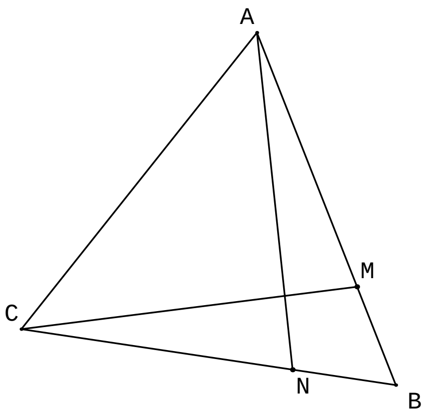
On a : $\overrightarrow{\Omega A_2}(3;4)$ et $\overrightarrow{A_2M}(x-6;y-3)$

$M(x;y)\in D_2 \Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega A_2}\cdot\overrightarrow{A_2M}=0 \quad\Leftrightarrow\quad 3(x-6)+4(y-3)=0 \quad\Leftrightarrow\quad 3x+4y-30=0$

Une équation cartésienne de D_2 est $3x+4y-30=0$

Exercice 3

1)



2) $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=\left\|\overrightarrow{BA}\right\|\times\left\|\overrightarrow{BC}\right\|\times\cos\left(\widehat{\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC}}\right)=4\times4\times\cos\frac{\pi}{3}=4\times4\times\frac{1}{2}=8$

3) $\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BN}=-\overrightarrow{BA}+k\overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BM}=-\overrightarrow{BC}+k\overrightarrow{BA}$

4) $\overrightarrow{AN}\cdot\overrightarrow{CM}=\left(-\overrightarrow{BA}+k\overrightarrow{BC}\right)\cdot\left(-\overrightarrow{BC}+k\overrightarrow{BA}\right)=\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}-k\overrightarrow{BA}^2-k\overrightarrow{BC}^2+k^2\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$

$=8-16k-16k+8k^2 \quad = 8k^2-32k+8$

Produit dans le plan: corrigé

5) Pour que les droites (AN) et (CM) soient perpendiculaires il faut et il suffit que

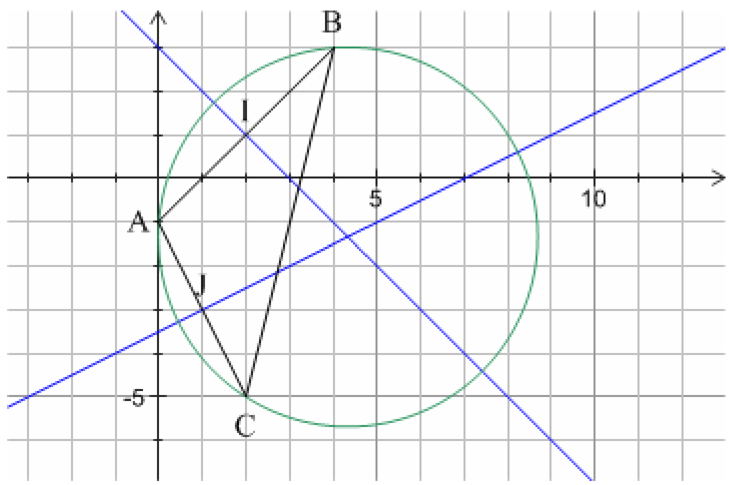
$\overrightarrow{AN}\cdot\overrightarrow{CM}=0 \quad \Leftrightarrow \quad 8k^2-32k+8=0 \quad \Leftrightarrow \quad k^2-4k+1=0$

Le discriminant réduit de cette équation du second degré : $\Delta' = (-2)^2-1 = 3$ donc $\sqrt{\Delta} = \sqrt{3}$

Les solutions sont donc : $k_1 = 2-\sqrt{3}$ et $k_2 = 2+\sqrt{3}$

Or k est un réel de l'intervalle [0 , 1] , seulement k_1 appartient à [0 , 1] donc il y'a qu'un seul réel $k = 2-\sqrt{3}$ pour lesquelles les droites (AN) et (CM) sont perpendiculaires .

Exercice 4



1) Soit I le milieu de [AB], il a pour coordonnées $I\left(\frac{x_A+x_B}{2};\frac{y_A+y_B}{2}\right)$ d'où $I(2;1)$

Soit J le milieu de [AC], il a pour coordonnées $J\left(\frac{x_A+x_C}{2};\frac{y_A+y_C}{2}\right)$ d'où $J(1;-3)$

La médiatrice de [AB] est la droite D qui passe par I et qui est perpendiculaire à (AB)

on a : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4\\4\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{IM}\begin{pmatrix}x-2\\y-1\end{pmatrix}$

$M(x\,;y)\in D \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{IM}=0 \Leftrightarrow \quad 4(x-2)+4(y-1)=0 \Leftrightarrow \quad 4x+4y-12=0$

$\Leftrightarrow \quad x+y-3=0$

Par conséquent, une équation de la médiatrice de [AB] est $x+y-3=0$

Produit dans le plan: corrigé

La médiatrice de [AC] est la droite D’’ qui passe par I et qui est perpendiculaire à (AB)

On a : $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2\\-4\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{JM}\begin{pmatrix}x-1\\y+3\end{pmatrix}$

$M(x\,;y)\in D'' \Leftrightarrow \overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{JM}=0 \Leftrightarrow 2(x-1)-4(y+3)=0 \Leftrightarrow 2x-4y-14=0$

$\Leftrightarrow x-2y-7=0$

Par suite, une équation de la médiatrice de [AC] est $x-2y-7=0$

2) Le centre Ω du cercle circonscrit est le point d’intersection des médiatrices, ses coordonnées vérifient donc le système :

$$\begin{cases}x+y-3=0 & L_1\\ x-2y-7=0 & L_2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}3y+4=0 & L_1-L_2\\ 3x-13=0 & 2L_1+L_2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=-\dfrac{4}{3}\\ x=\dfrac{13}{4}\end{cases} \quad \text{donc} \quad \Omega\left(\frac{13}{3};-\frac{4}{3}\right)$$

3) Le rayon R du cercle circonscrit vérifie $R^2=A\Omega^2=(x_\Omega-x_A)^2+(y_\Omega-y_A)^2=\dfrac{170}{9}$

Une équation du cercle circonscrit au triangle ABC est donc $\left(x-\dfrac{13}{3}\right)^2+\left(y+\dfrac{4}{3}\right)^2=\dfrac{170}{9}$

Exercice 5

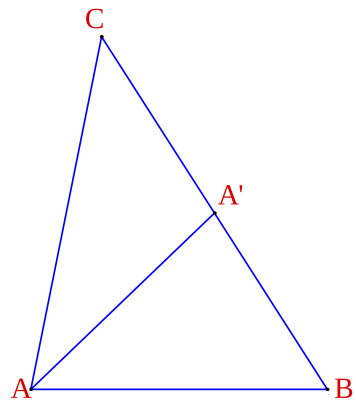
La somme des angles dans un triangle vaut 180° donc γ = 180 – (44+38) =98

On a $\dfrac{AB}{\sin\gamma}=\dfrac{AC}{\sin\beta}=\dfrac{BC}{\sin\alpha}$ donc $AC=\dfrac{AB\times\sin\beta}{\sin\gamma}=\dfrac{80,42\times\sin 38°}{\sin 98°}\approx 49,998$

La longueur AC mesure donc 50 m au cm près par excès.

Produit dans le plan: corrigé

Exercice 6



1. D'après le théorème de la médiane : $AB^2 + AC^2 = 2AA'^2 + \frac{1}{2}BC^2$

donc $AA'^2 = \frac{1}{2}\left(AB^2 + AC^2\right) - \frac{1}{4}BC^2 = \frac{1}{2}\left(5^2 + 6^2\right) - \frac{1}{4}\times 7^2 = \frac{73}{4}$

donc $AA' = \frac{\sqrt{73}}{2} \approx 4,27$

2. D'après le théorème d'Al Kashi : $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB\times AC\times \cos\widehat{BAC}$

donc $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB\times AC\times \cos\widehat{BAC}$

$\cos\widehat{BAC} = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB\times AC} = \frac{5^2 + 6^2 - 7^2}{2\times 5\times 6} = 0,2$

donc $\widehat{BAC} \approx 78,5°$