Exercice

Pour chaque question, une seule des trois propositions est exacte. Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.
Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct d'origine O.

1. Une solution de l'équation $2|z|+\overline{z}=4+\sqrt{3}-\mathrm{i}$ est :
   (a) $-\sqrt{3}+\mathrm{i}$
   (b) $\sqrt{3}+\mathrm{i}$
   (c) $\sqrt{3}-\mathrm{i}$
2. Soit z un nombre complexe. $|\mathrm{i}z+1|$ est égal à :
   (a) $|z|+1$
   (b) $|-\overline{z}-\mathrm{i}|$
   (c) $\sqrt{(1-y)^2-x^2}$
   (où $x=\mathrm{Re}(z)$ et $y=\mathrm{Im}(z)$)
3. Soit z un nombre complexe non nul d'argument θ. Un argument de $\frac{1}{-\overline{z}}\times(1+\mathrm{i})$ est :
   (a) $\frac{-3\pi}{4}+\theta$
   (b) $\frac{\pi}{4}+\theta$
   (c) $\frac{\pi}{4}-\theta$
4. Soit $j=\frac{-1}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$.
   Les termes de la suite $\left(j^n\right)$ ...
   (a) prennent une infinité de valeurs distinctes
   (b) prennent exactement quatre valeurs distinctes
   (c) prennent une infinité de fois la valeur 1
5. Soit A un point d'affixe -2. L'ensemble des points M d'affixe z vérifiant $|z|=|z+2|$ est :
   (a) la droite (OA)
   (b) une droite perpendiculaire à (OA)
   (c) un cercle
6. L'ensemble des points M d'affixe z vérifiant $|z+1-\mathrm{i}|=|3\sqrt{3}+3\mathrm{i}|$ a pour équation :
   (a) $z=-1+\mathrm{i}+36\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta},\ \theta\in\mathbb{R}$
   (b) $z=1-\mathrm{i}+6\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta},\ \theta\in\mathbb{R}$
   (c) $z=-1+\mathrm{i}+6\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta},\ \theta\in\mathbb{R}$
7. La transformation du plan qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe $z'=\mathrm{i}z+2$ est :
   (a) une rotation dont le centre a pour affixe $1+i$
   (b) une homothétie
   (c) une rotation dont le centre a pour affixe 2
8. Trois points A, B, C du plan sont tels que $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=\frac{1}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$. On peut affirmer :
   (a) que le triangle ABC est équilatéral.
   (b) que A, B, C sont alignés.
   (c) que le triangle ABC est rectangle en A.
9. Soit P la fonction définie sur $\mathbb{C}$ par :
   $$P(z)=z^2+bz+1$$
   (où b est un nombre réel). On sait que $(b-2)(b+2)\in\,]0;+\infty[$. Dans ce cas :
   (a) L'équation $P(z)=0$ n'a pas de solution dans $\mathbb{C}$.
   (b) L'équation $P(z)=0$ a deux solutions dans $\mathbb{C}$.
   (c) On ne peut pas savoir.
10. Soit θ un réel. La forme exponentielle du complexe $z=-5\Big(\sin(\theta)-\mathrm{i}\cos(\theta)\Big)$ est :
   (a) $5\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)}$
   (b) $5\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+\pi)}$
   (c) $5\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}$

Exercice

1. b

$2|z|+\bar{z}=4+\sqrt{3}-i \Leftrightarrow 2\sqrt{x^2+y^2}+(x-iy)=4+\sqrt{3}-i \Leftrightarrow 2\sqrt{x^2+y^2}+x-iy=4+\sqrt{3}-i$

Par unicité de l'écriture, les parties imaginaires doivent être égales, d'où $-y=-1$ et donc $\boxed{y=1}$

Nous éliminons alors le c)

L'égalité des parties réelles donne alors : $2\sqrt{x^2+y^2}+x=4+\sqrt{3}$ et donc $2\sqrt{x^2+1}+x=4+\sqrt{3}$

comme dans les 3 cas, on constate que $x^2=3$, cela implique que : $2\sqrt{4}+x=4+\sqrt{3}$ donc $\boxed{x=\sqrt{3}}$

2. b

$|iz+1|=|i(x+iy)+1|=|-y+1+ix|=\sqrt{(1-y)^2+x^2}$ où $z=x+iy$

$|-\bar{z}-i|=|-(x-iy)-i|=|-x+i(y-1)|=\sqrt{x^2+(y-1)^2}=\sqrt{(1-y)^2+x^2}$

3. a

$\arg\left(\frac{1}{-\bar{z}}\times(1+i)\right)=\arg\left(\frac{1}{-\bar{z}}\right)+\arg(1+i)=-\arg(-\bar{z})+\arg(1+i)$; Or $\arg(-\bar{z})=\arg(\bar{z})+\pi=-\arg z+\pi$

donc $\arg\left(\frac{1}{-\bar{z}}\times(1+i)\right)=\arg z-\pi+\arg(1+i)=\arg z-\pi+\frac{\pi}{4}=\arg z-\frac{3\pi}{4}$

4. c

$j=e^{i\frac{2\pi}{3}}$; $j^2=e^{i\frac{4\pi}{3}}$; $j^3=e^{i\frac{6\pi}{3}}=e^{i2\pi}=1$; $j^4=j$; $j^5=j^2$; $j^6=1$ …

5. b

$|z|=|z+2| \Leftrightarrow OM=AM \Leftrightarrow$ M est sur la médiatrice de [OA]

6. c

$|z+1-i|=|3\sqrt{3}+3i| \Leftrightarrow |z+1-i|=\sqrt{27+9} \Leftrightarrow |z+1-i|=6 \Leftrightarrow z+1-i=6e^{i\theta} \Leftrightarrow z=-1+i+6e^{i\theta}$

7. a

$z'=iz+2 \Leftrightarrow z'=e^{i\frac{\pi}{2}}z+2$ C'est une rotation ;

Pour trouver le centre, il faut chercher les points invariants :

$z'=z \Leftrightarrow iz+2=z \Leftrightarrow z(i-1)=-2 \Leftrightarrow z=\frac{-2}{i-1}=\frac{2}{1-i}=\frac{2(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\frac{2(1+i)}{2}=1+i$

8. a

$\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \left|\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right|=\left|\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right| \Rightarrow \frac{|z_C-z_A|}{|z_B-z_A|}=1 \Rightarrow \frac{AC}{AB}=1$ donc $AC=AB$

$\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \arg\left(\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right)=\arg\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \Rightarrow \left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=\frac{\pi}{3}$

9. b

Equation du second degré ; $\Delta=b^2-4ac=b^2-4=(b-2)(b+2)$ donc $\Delta>0$

10. a

$z=-5(\sin\theta-i\cos\theta)=5(-\sin\theta+i\cos\theta)=5i(i\sin\theta+\cos\theta)=5e^{i\frac{\pi}{2}}e^{i\theta}=5e^{i\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)}$