

Exercice 1 :**1. c****Justification :**

On pose $\vec{w} = \overrightarrow{BF} \wedge \overrightarrow{BC}$ donc $\vec{w}$ orthogonal à $\overrightarrow{BF}$ et $\overrightarrow{BC}$ et $\|\vec{w}\| = BF \cdot BC \sin \frac{\pi}{2} = 1$ alors $\vec{w} = \overrightarrow{BA}$

2. c

Justification : Le plan d'équation $x = 1$ est le plan (BCG) et Le plan d'équation $y = 1$ est le plan (DCG)

Or $(BCG) \cap (DCG) = (CG)$

3. b

Justification : On a $A(0,0,0)$; $B(1,1,0)$ et $C(1,1,1)$ les coordonnées de ces points vérifient l'équation $x - y = 0$.

4. a

Justification : La sphère S d'équation $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ est la sphère de centre A et de rayon $R = \sqrt{2}$

$d(A, P) = \frac{|ax + by + cz + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = 1 < \sqrt{2}$ donc $d(A, P) < R$ alors $S \cap P$ est un cercle.

Exercice 2 :

1) a) $a = \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $b = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i = e^{i\frac{\pi}{6}}$.

b) $b^2 = \left(e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^2 = e^{i\frac{\pi}{3}}$ donc $b^2 = a$.

2) a) Voir figure.

b) On a $c = a + b = \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i = \frac{1+\sqrt{3}}{2} + \frac{1+\sqrt{3}}{2}i$ donc $c = \frac{1+\sqrt{3}}{2}(1+i)$.

Or $1+i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ donc $c = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$.

3) a) On a $b^2 + b - c = a + b - c$ (car $b^2 = a$)

$$\Leftrightarrow b^2 + b - c = a + b - (a + b) \quad (\text{car } c = a + b)$$

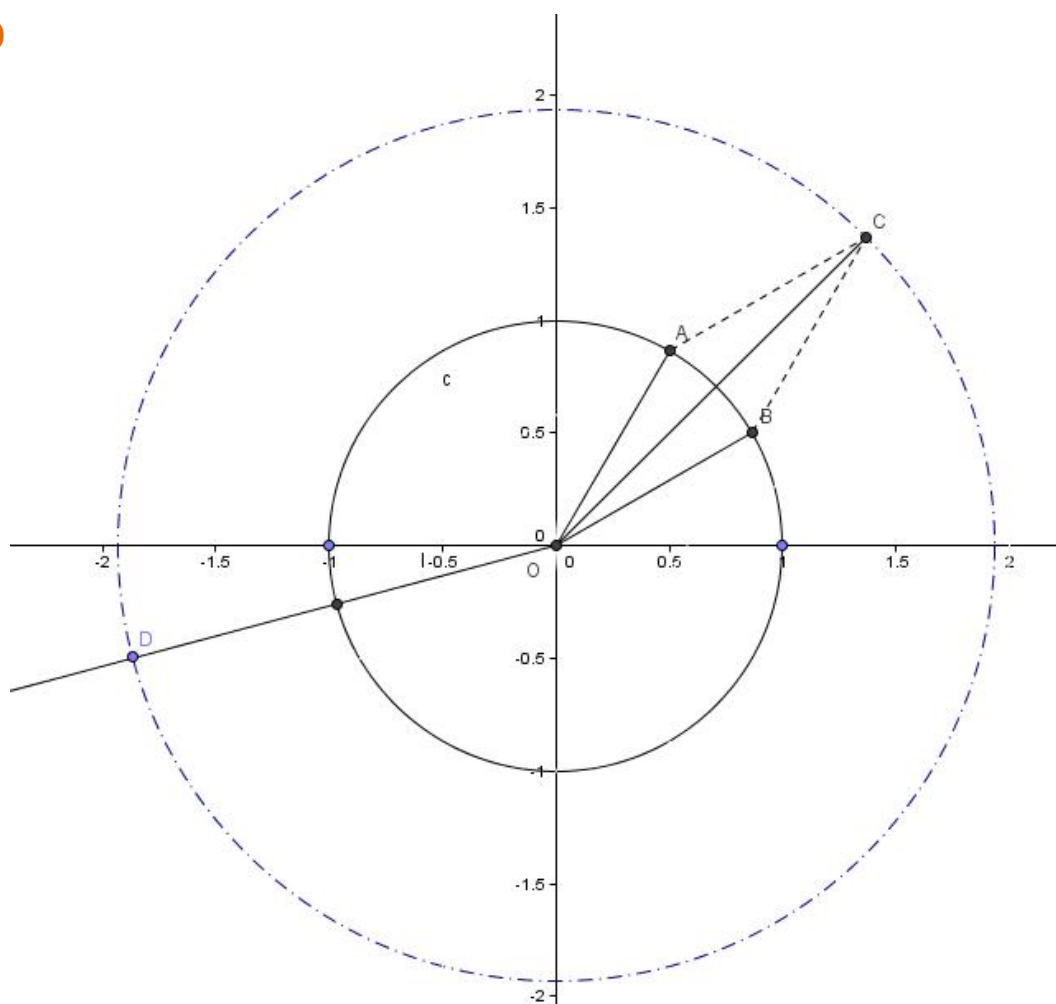
$$\Leftrightarrow b^2 + b - c = 0. \text{ Donc } b \text{ est une solution de l'équation (E).}$$

b) d est l'autre solution de (E) donc $b.d = -c$ (car $z'.z'' = \frac{c}{a}$)

$$\text{alors } d = -\frac{c}{b} = -\frac{\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{2} e^{i\frac{\pi}{4}}}{e^{i\frac{\pi}{6}}} = -\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{2} e^{i(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6})} = -\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{2} e^{i\frac{\pi}{12}} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{2} e^{i(\frac{\pi}{12} - \pi)}$$

$$\text{donc } d = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{2} e^{i(-\frac{11\pi}{12})}.$$

c)



Exercice 3 :

1) Voir figure.

2) a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln^2 x - \ln x + 1 = +\infty$ (car $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln^2 x = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} -\ln x = +\infty$)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln^2 x - \ln x + 1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x \left(\ln x - 1 + \frac{1}{\ln x} \right) = +\infty$$

b) * $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} \left(\ln x - 1 + \frac{1}{\ln x} \right) = +\infty$.

* Interprétation graphique : La courbe (C_f) de f admet une branche infinie de direction $(0, \vec{j})$ au voisinage de $+\infty$.

c) f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et $f'(x) = \frac{2}{x} \ln x - \frac{1}{x} = \frac{2 \ln x - 1}{x}$.

d) $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2 \ln x - 1 = 0 \Leftrightarrow \ln x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \sqrt{e}$.

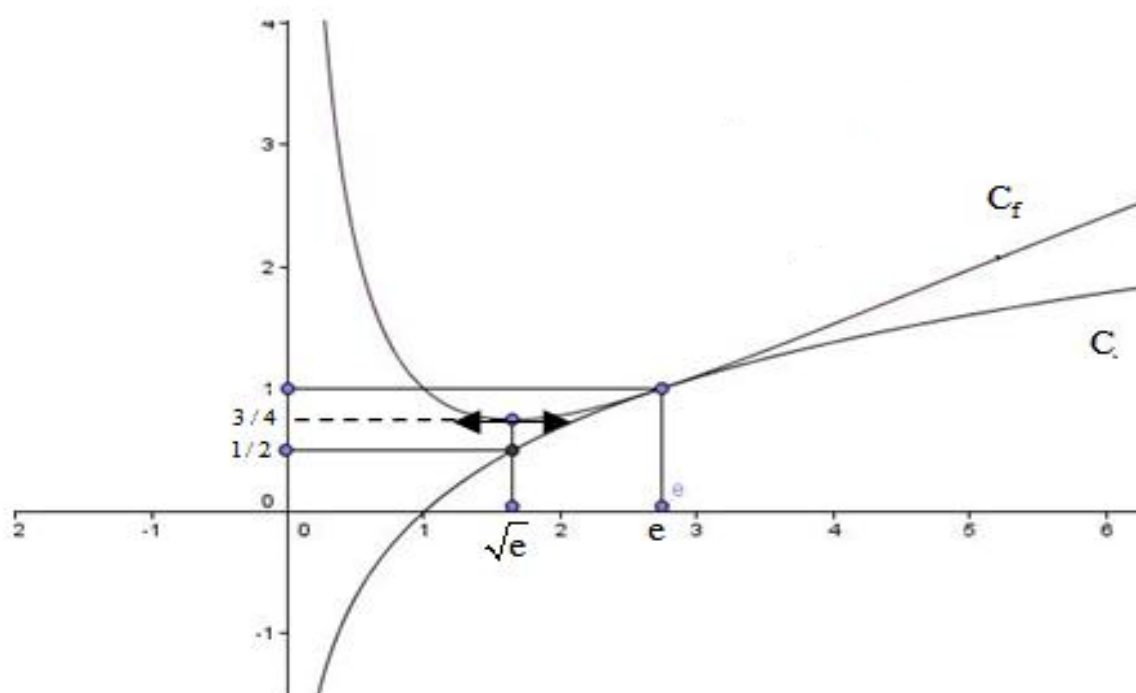
Tableau de variation de f :

x	0	$\sqrt{e}$	$+\infty$
$f'(x)$		0	+
$f(x)$	$+\infty$	$\frac{3}{4}$	$+\infty$

3) a) $f(x) - \ln x = \ln^2 x - 2 \ln x + 1 = (\ln x - 1)^2$ donc $f(x) - \ln x \geq 0$ pour tout $x \in]0, +\infty[$

Donc C_f est au dessus de (C) et $C_f \cap C = \{(1, e)\}$.

b)



4) a) $I = \int_1^e \ln^2 x dx$ on pose $\begin{cases} u(x) = \ln^2 x \rightarrow u'(x) = \frac{2}{x} \ln x \\ v'(x) = 1 \rightarrow v(x) = x \end{cases}$

alors $I = \left[x \ln^2 x \right]_1^e - \int_1^e 2 \ln x dx = e - 2 \int_1^e \ln x dx$.

On pose $\begin{cases} u(x) = \ln x \rightarrow u'(x) = \frac{1}{x} \\ v'(x) = 1 \rightarrow v(x) = x \end{cases}$ alors $I = e - 2 \left(\left[x \ln x \right]_1^e - \int_1^e dx \right) = e - 2(e - e + 1) = e - 2$

Conclusion : $I = \int_1^e \ln^2 x dx = e - 2$.

b) $A = \int_1^e (f(x) - \ln x) dx = \int_1^e (\ln^2 x - 2 \ln x + 1) dx = \int_1^e \ln^2 x dx - 2 \int_1^e \ln x dx + \int_1^e dx$, alors

$A = e - 2 - 2 + e - 1 = 2e - 5$ donc $A = 2e - 5$

Exercice 4 :

1) a) On a $e^{-\frac{x}{4}} = x \Leftrightarrow f(x) = y$, graphiquement la droite Δ coupe la courbe C_f en un unique point d'abscisse

$\alpha \in [0,1]$ donc l'équation $e^{-\frac{x}{4}} = x$ admet dans $[0,1]$ une unique solution α .

b) On pose $g(x) = e^{-\frac{x}{4}} - x$ donc $e^{-\frac{x}{4}} = x \Leftrightarrow g(x) = 0$.

On a $g(0,8) = 0,018 > 0$ et $g(0,9) = -0,101 < 0$ alors $g(0,8) \times g(0,9) < 0$ alors $0,8 < \alpha < 0,9$

2) (U_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases}, n \geq 0$

a) – On a $U_0 = 1$ donc $0 \leq U_0 \leq 1$

– Supposant que $0 \leq U_n \leq 1$ et montrons que $0 \leq U_{n+1} \leq 1$.

On a : $0 \leq U_n \leq 1$ donc $f(1) \leq f(U_n) \leq f(0)$ (graphiquement f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$)

De plus $f(0) = 1$ et $f(1) \geq 0$ alors $0 \leq f(U_n) \leq 1$ donc $0 \leq U_{n+1} \leq 1$ donc vrai pour $n+1$.

– Conclusion : $0 \leq U_n \leq 1$ pour tout entier naturel n .

b) On a $f(x) = e^{-\frac{x}{4}} \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{4} e^{-\frac{x}{4}} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

On a $0 \leq x \leq 1 \Rightarrow -\frac{1}{4} \leq -\frac{x}{4} \leq 0 \Rightarrow e^{-\frac{1}{4}} \leq e^{-\frac{x}{4}} \leq 1 \Rightarrow -\frac{1}{4} \leq f'(x) \leq -\frac{1}{4} e^{-\frac{1}{4}} \Rightarrow |f'(x)| \leq \frac{1}{4}$ (car $\left| -\frac{1}{4} \right| > \left| -\frac{1}{4} e^{-\frac{1}{4}} \right|$)

Donc $|f'(x)| \leq \frac{1}{4}$ pour tout $x \in [0,1]$

c) On a f continue sur $[0,1]$ et dérivable sur $]0,1[$ de plus $|f'(x)| \leq \frac{1}{4}$ pour tout $x \in [0,1]$ donc d'après le théorème

des inégalités des accroissements finis pour tous a et b de l'intervalle $[0,1]$ on a : $|f(b) - f(a)| \leq \frac{1}{4}|b - a|$

D'autre part on a $0 \leq U_n \leq 1$ pour tout entier naturel n et $\alpha \in [0,1]$ donc $|f(U_n) - f(\alpha)| \leq \frac{1}{4}|U_n - \alpha|$

alors $|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{4}|U_n - \alpha|$, (car $f(\alpha) = \alpha$).

d) On a $|U_1 - \alpha| \leq \frac{1}{4}|U_0 - \alpha|$, or $|U_0 - \alpha| = |1 - \alpha|$ et on a $0,8 < \alpha < 0,9$ donc $|1 - \alpha| \leq 1$ alors

$$|U_1 - \alpha| \leq \frac{1}{4}$$

On suppose que : $|U_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n$,

et on montre que : $|U_{n+1} - \alpha| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}$,

$$|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{4}|U_n - \alpha| \leq \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^n \quad \text{donc} \quad |U_{n+1} - \alpha| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}$$

D'où pour tout entier naturel n , $|U_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n$.

e) On a $|U_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = 0$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} (U_n - \alpha) = 0$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 0$.

Donc (U_n) converge vers α .

3) a) Pour que $|U_n - \alpha| < 10^{-3}$ il suffit que $\left(\frac{1}{4}\right)^n < 10^{-3}$ d'où $n \ln\left(\frac{1}{4}\right) < -3 \ln 10$ donc $n > \frac{-3 \ln 10}{-\ln 4}$

donc $n > 4,98$ donc $n_0 = 5$

b) On a $|U_5 - \alpha| < 10^{-3}$ donc une valeur approchée de α à 10^{-3} près est U_5 .

On a $U_3 = f(U_2) \approx 0,814$; $U_1 = f(U_0) = f(1) \approx 0,778$; $U_2 = f(U_1) \approx 0,823$; $U_3 = f(U_2) \approx 0,814$;

$U_5 = f(U_4) \approx 0,815$, alors une valeur approchée de α à 10^{-3} près est $0,815$.