

Exercice 1 :

Les choix corrects sont :

1°) Choix (c) : $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - x \ln x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(1 - \frac{\ln x}{x}\right) = +\infty$.

2°) Choix (a) : $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2 \left(\frac{e^{2x} - 1}{2x}\right) = 2$

3°) Choix (b) : $f'(x) = ke^{kx}$, f est solution de l'équation différentielle $y' - 2y = 0$ pour $k = 2$

Exercice 2 :

1. a) $(5 + 2i)^2 = 5^2 + 2 \cdot 5 \cdot (2i) + (2i)^2 = 25 + 20i - 4 = 21 + 20i$.

b) Le discriminant est :

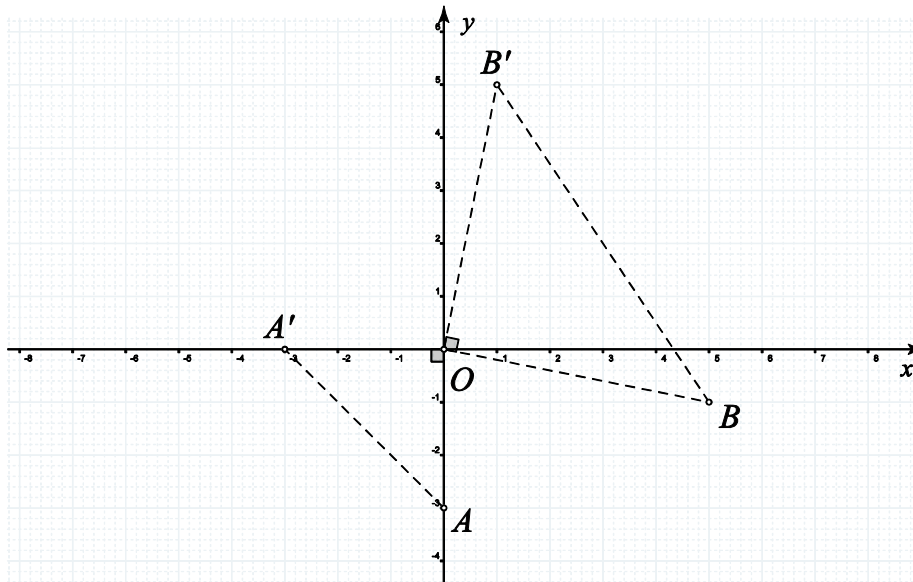
$$\Delta = [-(5 - 4i)]^2 - 4(-3 - 15i) = (5 - 4i)^2 + 12 + 60i = 25 - 40i - 16 + 12 + 60i = 21 + 20i$$

En tenant compte du résultat précédemment établi en 1. a) , on peut écrire : $\Delta = (5 + 2i)^2$

Ce qui se traduit encore par : les racines carrées complexes de Δ sont : $\delta_1 = 5 + 2i$ et $\delta_2 = -5 - 2i$

Les solutions de l'équation sont donc : $z_1 = \frac{(5 - 4i) - (5 + 2i)}{2} = -3i$ et $z_2 = \frac{(5 - 4i) + (5 + 2i)}{2} = 5 - i$.

2. a)



2. b)

• Triangle OAA' :

Les deux points A et A' appartiennent respectivement aux axes $(O, \vec{v})$ et $(O, \vec{u})$.

Ces axes étant perpendiculaires, le triangle OAA' est donc rectangle en O .

$OA = |-3i| = 3$ et $OA' = |-3| = 3$ alors le triangle OAA' est isocèle en O .

• Triangle OBB' :

Le rapport $\frac{z_{B'}}{z_B} = \frac{1+5i}{5-i} = \dots = i$ est imaginaire pur. On en déduit que OBB' est rectangle en O .

$OB = |5-i| = \sqrt{26}$ et $OB' = |1+5i| = \sqrt{26}$ alors OBB' est isocèle de sommet principal O .

Méthode alternative acceptable : Réciproque de Pythagore : $OB^2 = 26$, $OB'^2 = 26$, $BB'^2 = 52$.

3. a)

$M \in (AB)$ signifie " $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires " signifie $\overrightarrow{AM} = k \cdot \overrightarrow{AB}$, $k \in \mathbb{R}$

signifie $z_M + 3i = k[(5-i) - (-3i)]$, $k \in \mathbb{R}$ signifie $z_M + 3i = k[5+2i]$, $k \in \mathbb{R}$

signifie $z_M = 5k + (2k-3)i$, $k \in \mathbb{R}$

b) (OM) et $(A'B')$ sont perpendiculaires $\iff \overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{A'B'}$ sont orthogonaux

$\iff \frac{z_M}{(1+5i)-(-3)} \text{ est imaginaire pur } \iff \frac{5k + (2k-3)i}{4+5i} \text{ est imaginaire pur}$

$\iff (30k-15) - i(17k-12) \text{ est imaginaire pur } \iff 30k-15=0 \text{ signifie } k = \frac{1}{2}$

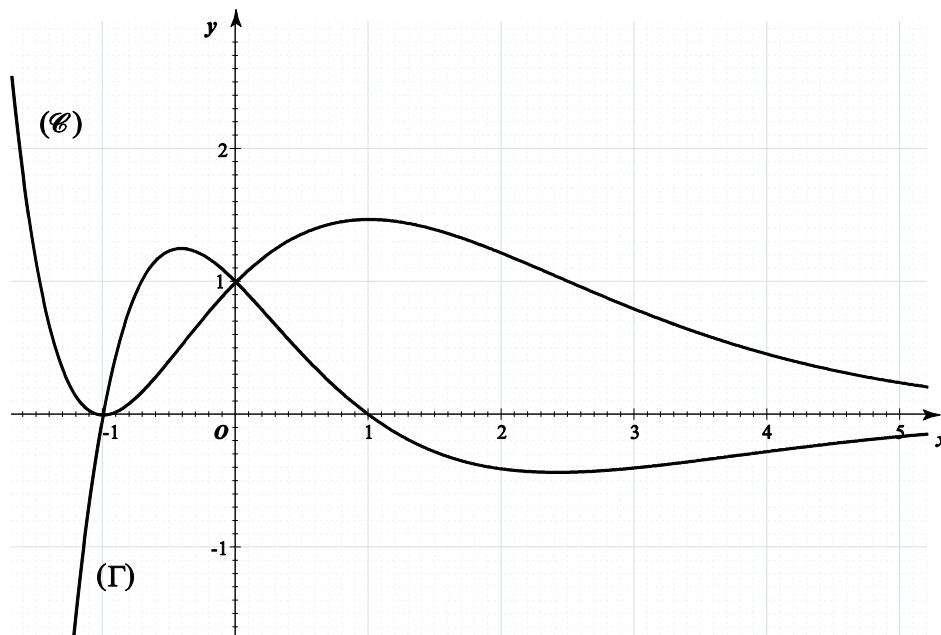
$\iff z_M = \frac{5-4i}{2}$

Par ailleurs, l'abscisse du point milieu du segment $[AB]$ est $z_{A*B} = \frac{z_A + z_B}{2} = \frac{-3i + 5 - i}{2} = \frac{5-4i}{2}$

Pour $z_M = \frac{5-4i}{2}$, on a : $2OM = 2 \left| \frac{5-4i}{2} \right| = \sqrt{41}$ et $A'B' = |4+5i| = \sqrt{41} = 2OM$

Exercice 3 :

A-1.



L'idée repose sur le principe suivant :

" Le signe de la fonction dérivée d'une fonction indique les variations de la fonction ".

On constate, graphiquement, que la courbe ($\mathcal{C}$) est celle d'une fonction positive sur $\mathbb{R}$.

Si jamais ($\mathcal{C}$) représentait la fonction dérivée f' , la fonction f serait alors croissante sur $\mathbb{R}$.

L'allure de la courbe (Γ) ne correspondant pas à ce profil, (Γ) ne peut donc pas représenter la fonction f .

On retient alors que ($\mathcal{C}$) : Courbe représentative de f .

(Γ) : Courbe représentative de f' .

2. $f(0)=1$: lecture graphique immédiate sur la courbe ($\mathcal{C}$)

$f'(0)=1$: lecture graphique immédiate sur la courbe (Γ)

$f(-1)=0$: lecture graphique immédiate sur la courbe ($\mathcal{C}$)

$f'(-1)=0$: lecture graphique immédiate sur la courbe (Γ)

3. On a : $\mathcal{A} = \int_{-1}^0 f'(x) dx = [f(x)]_{-1}^0 = f(0) - f(-1) = 1 - 0 = 1$ (ua)

B- 1. a) L'intégrale se présente sous la forme : $\int_{-1}^0 f(x) dx = \int_{-1}^0 (x+1)^2 e^{-x} dx$ et l'énoncé nous invite à procéder à une double intégration par parties qu'il faudra effectuer convenablement :

Première intégration par parties : Notons $\begin{cases} u_1(x) = (x+1)^2 \\ v_1'(x) = e^{-x} \end{cases}$, $\begin{cases} u_1'(x) = 2(x+1) \\ v_1(x) = -e^{-x} \end{cases}$

$$\int_{-1}^0 f(x) dx = \int_{-1}^0 (x+1)^2 e^{-x} dx = \left[-(x+1)^2 e^{-x} \right]_{-1}^0 - \int_{-1}^0 -2(x+1)e^{-x} dx = \left[-(x+1)^2 e^x \right]_{-1}^0 + \int_{-1}^0 2(x+1)e^x dx$$

Cette dernière intégrale nécessite, à son tour, une nouvelle intégration par parties

Deuxième intégration par parties : Notons $\begin{cases} u_2(x) = 2(x+1) \\ v_2'(x) = e^{-x} \end{cases}$, $\begin{cases} u_2'(x) = 2 \\ v_2(x) = -e^{-x} \end{cases}$

$$\int_{-1}^0 2(x+1)e^{-x} dx = \left[-2(x+1)e^{-x} \right]_{-1}^0 + \int_{-1}^0 2e^{-x} dx = \left[-2(x+1)e^{-x} \right]_{-1}^0 + \left[-2e^{-x} \right]_{-1}^0 = \left[-2(x+2)e^{-x} \right]_{-1}^0$$

$$\text{On obtient : } \int_{-1}^0 f(x) dx = \left[-(x+1)^2 e^x \right]_{-1}^0 + \left[-2(x+2)e^{-x} \right]_{-1}^0 = \left[-(x^2 + 4x + 5)e^{-x} \right]_{-1}^0 = 2e - 5$$

$$\text{b) } \mathcal{A}' = \int_{-1}^0 (f'(x) - f(x)) dx = \mathcal{A} - \int_{-1}^0 f(x) dx = 1 - (2e - 5) = 6 - 2e \text{ (ua)}$$

2. a) La fonction g est dérivable sur $[1, +\infty[$ et on a :

$$\text{Pour tout } x \in [1, +\infty[, g'(x) = 2(x+1)e^{-x} - (x+1)^2 e^{-x} = (1-x^2)e^{-x} .$$

On retient que : Pour tout $x \in]1, +\infty[$, $g'(x) < 0$ et que par conséquent :

g est strictement décroissante sur $[1, +\infty[$.

g réalise donc une bijection de l'intervalle $[1, +\infty[$ sur $J = g([1, +\infty[)$

g étant continue sur $[1, +\infty[$, l'ensemble $J = g([1, +\infty[)$ est l'intervalle $J = \left] \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x), g(1) \right[$.

$$\text{On a : } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1)^2 e^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 e^{-x} + 2x e^{-x} + e^{-x} = 0 .$$

$$\text{On a : } g(1) = 4e^{-1} = \frac{4}{e} .$$

En définitive : g réalise une bijection de l'intervalle $[1, +\infty[$ sur $J = \left] 0, \frac{4}{e} \right[$.

La stricte décroissance ainsi que la continuité de g sur $[1, +\infty[$ peuvent être justifiées graphiquement.

La détermination de la valeur de $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$ peut être justifiée graphiquement : asymptote horizontale

La détermination de la valeur exacte de $g(1) = \frac{4}{e}$ est exigée.

B-2. b) Dans $[1, +\infty[$, l'équation $g(x) = x$ est équivalente à : $g(x) - x = 0$ ou encore à l'équation $\varphi(x) = 0$, où φ désigne la fonction définie sur $[1, +\infty[$ par $\varphi : x \mapsto g(x) - x$. Tout revient à montrer que l'équation $\varphi(x) = 0$, possède, dans $[1, +\infty[$, une unique solution α vérifiant $1,41 < \alpha < 1,42$.

La fonction φ est dérivable sur $[1, +\infty[$ et pour tout $x \in [1, +\infty[$,

$$\varphi'(x) = g'(x) - 1 = (1 - x^2)e^{-x} - 1.$$

On retient que : Pour tout $x \in]1, +\infty[$, $\varphi'(x) < 0$ et que par conséquent :

φ est strictement décroissante sur $[1, +\infty[$.

φ réalise donc une bijection de l'intervalle $[1, +\infty[$ sur $K = \varphi([1, +\infty[)$

φ étant continue sur $[1, +\infty[$, l'ensemble $K = \varphi([1, +\infty[)$ est l'intervalle $K =]\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x), \varphi(1)]$.

On a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) - 1 = -1$.

On a : $\varphi(1) = g(1) - 1 = \frac{4-e}{e}$.

En définitive : φ réalise une bijection de l'intervalle $[1, +\infty[$ sur $K =]-1, \frac{4-e}{e}]$.

$0 \in]-1, \frac{4-e}{e}]$, l'équation $\varphi(x) = 0$, possède, dans $[1, +\infty[$, une unique solution α .

La fonction φ est continue sur $[1, 41; 1, 42]$ et vérifie $\varphi(1,41) \cdot \varphi(1,42) < 0$.

On a alors, en vertu du théorème des valeurs intermédiaires, $1,41 < \alpha < 1,42$

c) La fonction g réalise une bijection de l'intervalle $[1, +\infty[$ sur $J =]0, \frac{4}{e}]$

La fonction g possède donc une fonction réciproque g^{-1} définie de $J =]0, \frac{4}{e}]$ sur $[1, +\infty[$.

De l'égalité $g(\alpha) = \alpha$, on tire : $g^{-1}(\alpha) = \alpha$.

g étant : • d'une part, dérivable sur $[1, +\infty[$ et en particulier en $\alpha = g^{-1}(\alpha)$

• d'autre part, vérifiant $g'(\alpha) = (1 - \alpha)^2 e^{-\alpha} \neq 0$

on en déduit que : La fonction g^{-1} est dérivable en α .

$$(g^{-1})'(\alpha) = \frac{1}{g'(g^{-1}(\alpha))} = \frac{1}{g'(\alpha)} = \frac{1}{(1 - \alpha)^2 e^{-\alpha}} = \frac{e^{\alpha}}{1 - \alpha^2} \quad (1).$$

$$\text{D'autre part, } g(\alpha) = \alpha \Leftrightarrow (\alpha + 1)^2 e^{-\alpha} = \alpha \Leftrightarrow e^{\alpha} = \frac{(\alpha + 1)^2}{\alpha}.$$

En remplaçant cette dernière valeur de e^{α} dans la relation (1), on obtient :

$$(g^{-1})'(\alpha) = \frac{e^{\alpha}}{1 - \alpha^2} = \frac{(\alpha + 1)^2}{\alpha(1 - \alpha)^2} = \frac{\alpha + 1}{\alpha(1 - \alpha)}.$$

Exercice 4 :

1. a) On a : $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ d'où $(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Comme $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \neq \vec{0}$ alors A, B et C ne sont pas alignés et définissent donc un plan $(\mathcal{P})$.

b) Le vecteur $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ est un vecteur normal au plan $(ABC) = (\mathcal{P})$, d'où :
 $(\mathcal{P}) : x + y + z + d = 0$, $d \in \mathbb{R}$.

L'écriture $A(1, 0, 0) \in (\mathcal{P}) \Leftrightarrow 1 + d = 0 \Leftrightarrow d = -1$ permet alors de conclure :
 $(\mathcal{P}) : x + y + z - 1 = 0$.

Méthode alternative 2 acceptable : Vérifications $A \in (\mathcal{P})$, $B \in (\mathcal{P})$ et $C \in (\mathcal{P})$.

Méthode alternative 3 acceptable : Coplanarité de $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$: $\det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 0 \Leftrightarrow \dots$.

2. a) On a la réduction :

$$(\mathcal{P}) : x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2z + 1 = 0 \Leftrightarrow (\mathcal{P}) : (x-1)^2 - 1 + y^2 + (z-1)^2 - 1 + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (\mathcal{P}) : (x-1)^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1$$

On en déduit que l'ensemble $(\mathcal{P})$ est une sphère de centre $I(1, 0, 1)$ et de rayon $R=1$.

b) Il suffit de montrer que les trois points A , B et C appartiennent à la sphère $(\mathcal{P})$.

On a $(1-1)^2 + 0^2 + (0-1)^2 = 1$, d'où $A \in (\mathcal{P})$.

On a $(0-1)^2 + 0^2 + (1-1)^2 = 1$, d'où $B \in (\mathcal{P})$.

On a $(1-1)^2 + (-1)^2 + (1-1)^2 = 1$, d'où $C \in (\mathcal{P})$.

Méthode alternative acceptable :

Calcul de distances ... puis le reste ... : $d = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $r = \sqrt{\frac{2}{3}}$, $d < r$, $H\left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$, $AH = BH = CH$,

3. a) Le vecteur $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ étant précédemment déterminé, on utilise la formule :

$$V(IABC) = \frac{1}{6} |\overrightarrow{AI} \cdot (\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC})|.$$

Le calcul $\overrightarrow{AI} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ainsi que le calcul du produit scalaire donne $V(IABC) = \frac{1}{6}$ (uv)

b) Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on a : $\overrightarrow{AM} \begin{pmatrix} \alpha-1 \\ 0 \\ 2-\alpha \end{pmatrix}$ et

$$V(MABC) = \frac{1}{6} |\overrightarrow{AM} \cdot (\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC})| = \frac{1}{6} |(\alpha-1).1 + 0.1 + (2-\alpha).1| = \frac{1}{6} \text{ indépendant de } \alpha$$

Exercice 5 :

1. a) Simple calcul, à l'aide d'une calculatrice :

t	0	1	2	3	4	5	6
x	9	11,2	14,8	18	22,8	28,8	36,2
$y = \ln x$	2,20	2,42	2,69	2,89	3,13	3,36	3,59

- b) La saisie des données (t, y) dans la calculatrice, puis la consultation de la touche $\boxed{r}$ renvoie la valeur $r \approx 0,9948$

L'énoncé, ne précisant pas l'ordre de l'arrondi concernant cette question, deux options se présentent

- Option 1 : L'arrondi, à l'ordre 10^{-3} . (Celui qui semble le plus adapté) conduit à $r \approx 0,995$
 - Option 2 : L'arrondi, à l'ordre 10^{-2} . (Celui qui s'aligne à la question précédente) conduit à $r \approx 1$.
- Les deux valeurs $r \approx 0,995$ ou $r \approx 1$ sont acceptées.

2. a) En respectant la consigne de l'énoncé indiquant l'obligation d'arrondir les résultats à l'ordre 10^{-2} , on obtient $a \approx 0,23$ et $b \approx 2,20$.

L'équation de la droite de régression $(\mathcal{D})$ est alors : $(\mathcal{D}) : y = 0,23t + 2,20$

- b) On a : $y = \ln x \Leftrightarrow x = e^y \Leftrightarrow x = e^{0,23t+2,20}$

L'expression de x en fonction de t est : $x = e^{0,23t+2,20}$

- c) Pour $t = 10$, on a : $x = e^{0,23 \times 10 + 2,20} = e^{4,50} \approx 90,017131$ (Valeur fournie par la calculatrice)

En écrivant $90,017131 = 9,0017131 \times 10^1$ et en arrondissant la mantisse à l'unité, on obtient : une estimation de x est $x \approx 90$, mais en tenant compte de l'unité de x , la réponse finale est : Pour $t = 10$, une estimation de x est $x \approx 90\,000$