

Lycée IBN KHALDOUN - RADES Mathématiques	<i>Devoir de contrôle n°4</i>
Prof : ABIDI Farid	2 ^e Sciences 1 ** Vendredi 10-02-2012 ** Durée : 1 heure

Exercice 1 : (4 points)

Répondre, avec justification, par Vrai ou Faux à chacune des propositions suivantes.

- Si (U_n) est une suite arithmétique de raison $r=5$ avec $U_{10} = 70$ alors $U_0 = 20$.
- Si (U_n) est une suite arithmétique de premier terme $U_0=5$ et de raison $r = \frac{1}{3}$ alors le nombre $\frac{25}{3}$ est le dixième terme de cette suite.
- Si $U_0 + U_1 + U_2 + \dots + U_n = 3n^2 + 7n + 4$ et $U_0 + U_1 + U_2 + \dots + U_{n-1} = 3n^2 + n$ alors (U_n) est une suite arithmétique.

Exercice 2 : (8 points)

Soit (V_n) la suite définie par : $V_0 = 1$ et pour tout entier naturel n , $V_{n+1} = 2V_n + 2n - 1$.

- Calculer V_1 et V_2 .
 - Montrer que la suite (V_n) n'est ni arithmétique, ni géométrique.
- On définit la suite (W_n) sur \mathbb{N} par $W_n = V_n + 2n + 1$.
 - Montrer que (W_n) est une suite géométrique dont on donnera la raison 2.
 - Exprimer W_n puis V_n en fonction de n .
 - Déterminer V_9 .

Exercice 3 : (8 points)

On considère un triangle ABA' rectangle en A . Soit R la rotation directe d'angle $\frac{\pi}{3}$ qui transforme A en A' . Voir figure ci jointe que l'on complètera et que l'on rendra avec la copie.

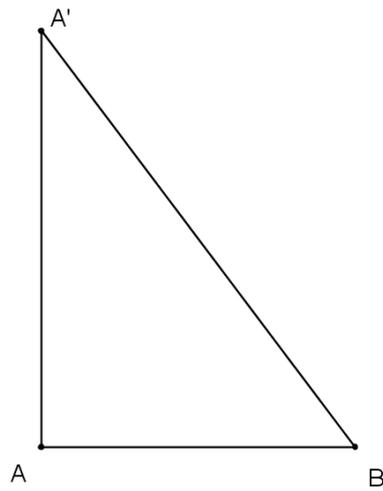
- Soit O le centre de R . Montrer que le triangle OAA' est équilatéral puis placer O .
- Construire $B' = R(B)$ et placer $A'' = R(A')$.
 - Montrer que les droites $(A'B')$ et $(A'A'')$ sont perpendiculaires.
- Soit I le milieu du segment $[BA']$. On désigne par I' l'image de I par R .

Montrer que (OI') est la médiatrice du segment $[A'A'']$.

- Soit J le point d'intersection de droites (AB) et $(A'B')$ et $J' = R(J)$.
Montrer que les points J, J', A' et B' sont alignés.

Figure de l'exercice 3 à compléter et à rendre

Nom de l'élève :



Exercice 1 :

1. Vrai.

En effet : (U_n) est une suite arithmétique de raison $r=5$ avec $U_{10} = 70$

$$\text{alors } U_0 = U_{10} - 10 \cdot r = 70 - 50 = 20 .$$

2. Faux.

En effet :

Le dixième terme de la suite arithmétique (U_n) de premier terme $U_0=5$ et de raison $r = \frac{1}{3}$ est

$$U_9 = U_0 + 9r = 5 + 3 = 8 \quad \text{donc } U_9 \neq \frac{25}{3} .$$

3. Vrai.

En effet : Si $U_0 + U_1 + U_2 + \dots + U_n = 3n^2 + 7n + 4$ et $U_0 + U_1 + U_2 + \dots + U_{n-1} = 3n^2 + n$

$$\text{alors } U_n = U_0 + U_1 + U_2 + \dots + U_n - (U_0 + U_1 + \dots + U_{n-1}) = 3n^2 + 7n + 4 - (3n^2 + n) = 6n + 4$$

donc (U_n) est une suite arithmétique.

Exercice 2 :

Soit (V_n) la suite définie par : $V_0 = 1$ et pour tout entier naturel n , $V_{n+1} = 2V_n + 2n - 1$.

1. a) $V_1 = 2V_0 - 1 = 1$ et $V_2 = 2V_1 + 2 - 1 = 2 + 1 = 3$.

b) $V_1 - V_0 = 0$ et $V_2 - V_1 = 2$ donc $V_1 - V_0 \neq V_2 - V_1$ donc (V_n) n'est pas une suite arithmétique.

$$\frac{V_1}{V_0} = 1 \text{ et } \frac{V_2}{V_1} = 3 \quad \text{donc } \frac{V_1}{V_0} \neq \frac{V_2}{V_1} \quad \text{donc } (V_n) \text{ n'est pas une suite géométrique.}$$

2. On définit la suite (W_n) sur \mathbb{N} par $W_n = V_n + 2n + 1$.

a) Pour tout entier naturel n ,

$$W_{n+1} = V_{n+1} + 2(n+1) + 1 = 2V_n + 2n - 1 + 2n + 3 = 2V_n + 4n + 2 = 2(V_n + 2n + 1) = 2W_n$$

donc (W_n) est une suite géométrique dont on donnera la raison 2.

b) Pour tout entier naturel n , $W_n = W_0 \cdot 2^n = (V_0 + 1)2^n = 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$

d'où $V_n = W_n - 2n - 1 = 2^{n+1} - 2n - 1$ en fonction de n .

c) $V_9 = 2^{10} - 19 = 1005$

Exercice 3 :

1. Soit O le centre de R . $R(A) = A'$ équivaut à $\begin{cases} OA = OA' \\ \angle AOA' = \frac{\pi}{3} \end{cases}$ (direct) donc le triangle OAA' est

équilatéral et de sens direct.

2. a) $B' = R(B)$ équivaut à $\begin{cases} OB = OB' \\ \angle BOB' = \frac{\pi}{3} \end{cases}$ (direct) donc le triangle OBB' est équilatéral et de sens direct.

$A'' = R(A')$ voir figure.

b) On a : $R(A) = A'$ et $r(B) = B'$ donc $r((AB)) = (A'B')$.

et $r(A') = A''$ donc $R((AA')) = (A'A'')$.

Or les droites (AA') et (AB) sont perpendiculaires alors les droites $(A'B')$ et $(A'A'')$ sont perpendiculaires.

3. I le milieu du segment $[BA']$ donc $I' = R(I)$ est le milieu du segment $R([BA']) = [B'A'']$.

Comme le triangle $BA'A''$ est rectangle en A' alors I' est le centre du cercle circonscrit au triangle $BA'A''$ d'où $I'A' = I'A''$.

Or $OA' = OA''$ alors (OI') est la médiatrice du segment $[A'A'']$.

5. Soit J le point d'intersection de droites (AB) et $(A'B')$ et $J' = R(J)$.

J appartient à la droite (AB) donc J' appartient à $R((AB)) = (A'B')$

D'où les points J, J', A' et B' sont alignés.

