

Mathématiques		<i>Devoir de synthèse n°1</i>	
Lycée IBN KHALDOUN - RADES			
3 ^e Maths 1	Jeudi 08-12-2011	Durée : 2 heures	Prof : ABIDI Farid

Le sujet comporte 3 pages

Exercice 1 : (3 points)

Pour chacune des questions suivantes une seule des trois propositions est exacte. Indiquer sur la copie le numéro et la lettre correspondant à la réponse choisie.

1) Soit ABC un triangle rectangle en A de sens direct tel que $AC = 3$ et $AB = 4$. On désigne par D le point du segment [BC] tel que $BD = \frac{2}{3} BC$. Alors $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$ est égal à :

- a) 4 ; b) 6 ; c) 8

2) Si $A(-\sqrt{3}; -1)$ dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, alors B le milieu du segment [OA] a pour coordonnées polaires :

- a) $(2; -\frac{5\pi}{6})$ b) $(1; -\frac{5\pi}{6})$; c) $(1; -\frac{2\pi}{3})$

3) L'ensemble des solutions dans $[0; 2\pi[$ de l'inéquation $\cos(x - \frac{\pi}{6}) > 0$ est :

- a) $]\frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}[$; b) $]\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}[$; c) $\left[0, \frac{2\pi}{3}\right[\cup \left]\frac{5\pi}{3}, 2\pi\right[$

Exercice 2 : (3 points)

Les trois questions sont indépendantes.

- Développer et réduire $(1+x)^{10}$.
- Déterminer le nombre de « mots » de quatre lettres différentes que l'on peut former avec les lettres du mot « DEVOIR ».
- Résoudre dans $\mathbb{N}^*$, l'équation $C_{2n}^1 + C_{2n}^2 + C_{2n}^3 = 387n$

Exercice 3 : (4 points)

On pose pour tout x réel, $A(x) = 2\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + 1$.

- Calculer $A\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$ et $A\left(\frac{3\pi}{2}\right)$.
- Résoudre, dans $\mathbb{R}$ puis dans $]-\pi; \pi]$, l'équation $A(x) = 0$.

3. a) Montrer que pour tout x réel, $A(x) = 3 - 4\sin^2\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{12}\right)$.

b) En déduire la valeur exacte de $\sin\frac{\pi}{12}$.

Exercice 4 : (5 points)

Dans un plan rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ on considère les points $A(3; 0)$, $B(3; 1)$ et $C(3; 4)$. On désigne par D le projeté orthogonal de C sur (OB)

1) a) Calculer $\overrightarrow{BO} \cdot \overrightarrow{BC}$.

b) En déduire alors BD

c) Calculer $\cos(\widehat{OBC})$

2) a) Calculer $\overrightarrow{BO} \cdot \overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BD}$ (On pourra remarquer que $\widehat{ABD} = \widehat{OBC}$)

b) Soit (x, y) les coordonnées de D , en calculant $\overrightarrow{BO} \cdot \overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BD}$ en fonction de x et y , déduire les coordonnées de D dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Exercice 5 : (5 points)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ par $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + 4x + 6}{x + 1}, & \text{si } x < -1 \\ \frac{x^2 - 2x}{x + 1}, & \text{si } -1 < x \leq 0 \\ \sqrt{x^2 + 4x + 9} - x - 3, & \text{si } x > 0 \end{cases}$

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère (C) la représentation graphique d'une fonction f .

1. a) Déterminer la limite de f en $-\infty$.

b) Montrer que la droite (D) d'équation $y = x + 3$ est asymptote à (C) au voisinage de $-\infty$.

2. a) Montrer que, pour tout $x > 0$, $f(x) = \frac{-2}{\sqrt{1 + \frac{4}{x} + \frac{9}{x^2}} + 1 + \frac{3}{x}}$.

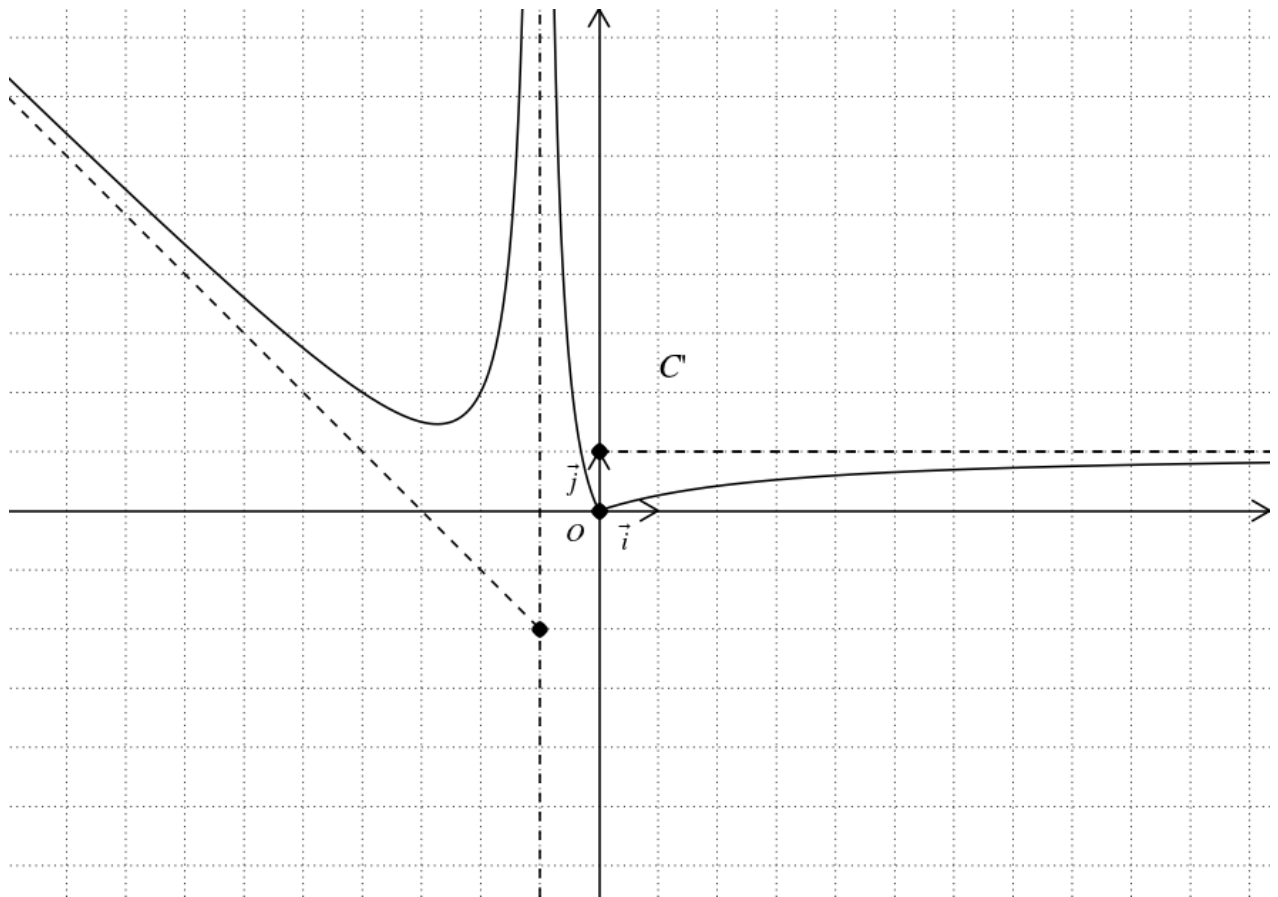
b) Montrer que la courbe (C) admet une asymptote (D') au voisinage de $+\infty$.

c) Montrer que la courbe (C) admet une autre asymptote dont on précisera une équation.

3. Montrer que f est continue en 0.

4. On donne (C') la courbe représentative d'une fonction g . Voir figure à la page 3-3.

Expliciter $g(x)$.



Corrigé

Exercice 1 :

1. c ; 2.a ; 3.c

Exercice 2 :

- $(1+x)^{10} = C_{10}^0 + C_{10}^1 x + C_{10}^2 x^2 + C_{10}^3 x^3 + C_{10}^4 x^4 + C_{10}^5 x^5 + C_{10}^6 x^6 + C_{10}^7 x^7 + C_{10}^8 x^8 + C_{10}^9 x^9 + C_{10}^{10} x^{10}$
 $= 1 + 10x + 45x^2 + 120x^3 + 210x^4 + 252x^5 + 210x^6 + 120x^7 + 45x^8 + 10x^9 + x^{10}$
- Le nombre de mots de quatre lettres différentes que l'on peut former avec les lettres du mot DEVOIR est : $A_6^4 = 6 \times 5 \times 4 \times 3 = 360$.
- Réolvons dans $\mathbb{N}^*$, l'équation $C_{2n}^1 + C_{2n}^2 + C_{2n}^3 = 387n$
Remarquons d'abord que l'on doit avoir $2n \geq 3$ donc $n \geq 2$.
L'équation s'écrit : $2n + \frac{1}{2}2n(2n-1) + \frac{1}{6}2n(2n-1)(2n-2) = 387n$
D'où, en multipliant par 3 : $6n + 3n(2n-1) + n(2n-1)(2n-2) = 1161n$.
On obtient une équation équivalente en divisant par :
 $6 + 3n(2n-1) + (2n-1)(2n-2) = 1161 \Leftrightarrow 4n^2 = 1156 \Leftrightarrow n^2 = 289 \Leftrightarrow n = 17$.

Exercice 3 :

On pose pour tout x réel, $A(x) = 2\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + 1$.

- Calculer $A\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = 2\cos\left(-\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{6}\right) + 1 = 2\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + 1 = 1$
et $A\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 2\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{6}\right) + 1 = 2\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) + 1 = 2\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + 1 = 2$.
- $A(x) = 0 \Leftrightarrow 2\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + 1 = 0 \Leftrightarrow \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \cos\frac{2\pi}{3}$
 $\Leftrightarrow x + \frac{\pi}{6} = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ ou $x + \frac{\pi}{6} = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$
 $\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ ou $x = -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Donc l'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ est : $\left\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{-\frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

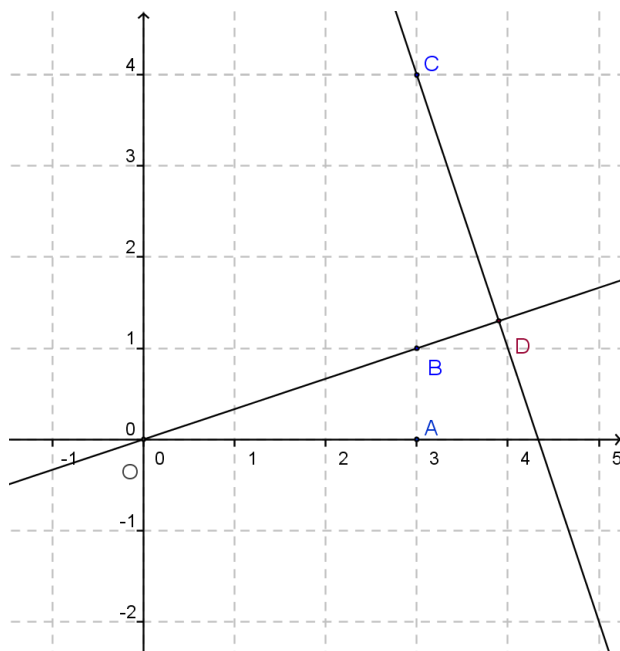
Et l'ensemble des solutions dans $]-\pi, \pi]$ est : $\left\{-\frac{5\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right\}$.

3. a) Pour tout x réel, $A(x) = 2\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + 1 = 2\left[1 - 2\sin^2\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{12}\right)\right] + 1 = 3 - 4\sin^2\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{12}\right)$.

b) $A(0) = 3 - 4\sin^2\frac{\pi}{12} \Leftrightarrow 2\cos\frac{\pi}{6} + 1 = 3 - 4\sin^2\frac{\pi}{12} \Leftrightarrow 4\sin^2\frac{\pi}{12} = 2 - \sqrt{3} \Leftrightarrow \sin^2\frac{\pi}{12} = \frac{2 - \sqrt{3}}{4}$.

Or $\frac{\pi}{12} \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ donc $\sin\frac{\pi}{12} > 0$ d'où $\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}$.

Exercice 4 :



1) a) On a : $\overrightarrow{BO} \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{BO} \cdot \overrightarrow{BC} = -3$.

b) $\overrightarrow{BO} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BO} \cdot \overrightarrow{BD} = -OB \cdot BD$ d'où $-OB \cdot BD = -3 \Leftrightarrow BD = \frac{3}{OB} \Leftrightarrow BD = \frac{3}{\sqrt{10}}$.

c) $\overrightarrow{BO} \cdot \overrightarrow{BC} = BO \cdot BC \cos(\angle OBC) \Leftrightarrow \cos(\angle OBC) = \frac{\overrightarrow{BO} \cdot \overrightarrow{BC}}{BO \cdot BC} \Leftrightarrow \cos(\angle OBC) = -\frac{1}{\sqrt{10}}$.

2) a) On a $\overrightarrow{BO} \cdot \overrightarrow{BD} = -3$ et $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BD} = BA \cdot BD \cdot \cos(\angle ABD) = 1 \cdot \frac{3}{\sqrt{10}} \cdot \cos(\angle OBC) = -\frac{3}{10}$.

b) Soit (x, y) les coordonnées de D, $\overrightarrow{BO} \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BD} \begin{pmatrix} x-3 \\ y-1 \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{BO} \cdot \overrightarrow{BD} = -3x - y + 10$

et $\overrightarrow{BA} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BD} \begin{pmatrix} x-3 \\ y-1 \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BD} = -y + 1$.

$$\text{Par suite : } \begin{cases} -3x - y + 10 = -3 \\ -y + 1 = -\frac{3}{10} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{39}{10} \\ y = \frac{13}{10} \end{cases}.$$

Donc les coordonnées de D dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ sont $(3,9; 1,3)$.

Exercice 5 :

$$\text{On considère la fonction } f \text{ définie sur } \mathbb{R} \setminus \{-1\} \text{ par } f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + 4x + 6}{x + 1}, & \text{si } x < -1 \\ \frac{x^2 - 2x}{x + 1}, & \text{si } -1 < x \leq 0 \\ \sqrt{x^2 + 4x + 9} - x - 3, & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on considère (C) la représentation graphique d'une fonction f.

$$1. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 4x + 6}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty.$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - (x + 3) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 4x + 6 - (x + 1)(x + 3)}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3}{x + 1} = 0 \text{ donc la droite (D) d'équation } y = x + 3 \text{ est asymptote à (C) au voisinage de } -\infty.$$

$$2. \text{ a) Pour tout } x > 0, f(x) = \sqrt{x^2 + 4x + 9} - x - 3 = \frac{-2x}{\sqrt{x^2 + 4x + 9} + x + 3} = \frac{-2}{\sqrt{1 + \frac{4}{x} + \frac{9}{x^2}} + 1 + \frac{3}{x}}.$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2}{\sqrt{1 + \frac{4}{x} + \frac{9}{x^2}} + 1 + \frac{3}{x}} = -1 \text{ donc la droite (D') d'équation } y = -1 \text{ est une}$$

asymptote à (C) au voisinage de $+\infty$.

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 4x + 6}{x + 1} = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2 - 2x}{x + 1} = +\infty \text{ donc la droite}$$

d'équation $x = -1$ est asymptote à la courbe (C).

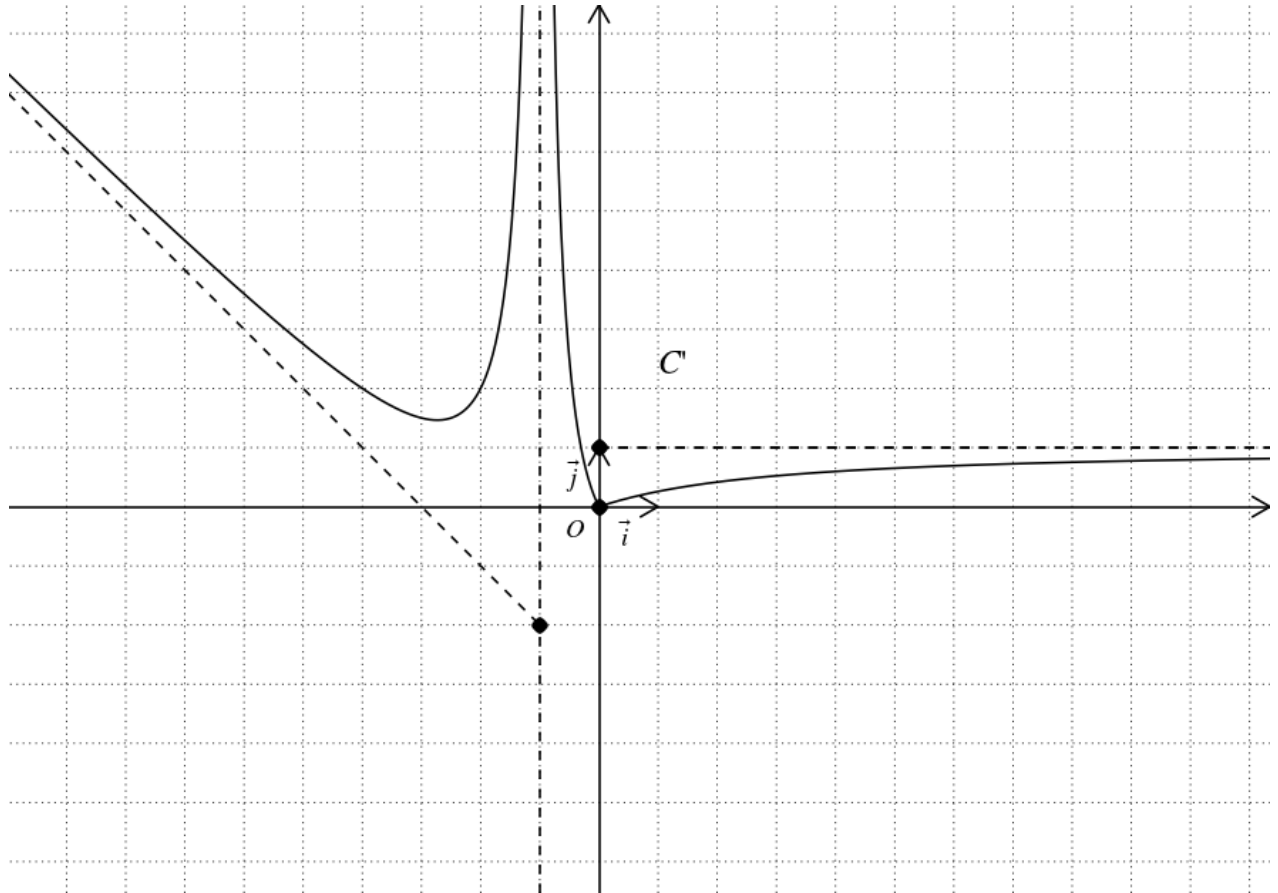
2. $f(0) = 0$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 - 2x}{x + 1} = 0 = f(0) \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x^2 + 4x + 9} - x - 3 = 0 = f(0)$$

Donc f est continue en 0.

3. On donne (C') la courbe représentative d'une fonction g . Voir figure à la page 3-3.

$$g(x) = |f(x)|.$$



La courbe représentative de f est :

