

Exercice 1.

1) $p(\bar{A}) = 0,6$: VRAI

justification : $p(A) = 0,4$, donc $p(\bar{A}) = 1 - 0,4 = 0,6$

2) $p(\bar{B} | A) = 0,7$: VRAI

justification : $p(B | A) = 0,3$, donc $p(\bar{B} | A) = 1 - 0,3 = 0,7$

3) $p(B) = 0,7$: FAUX

justification : $p(B) = p(A \cap B) + p(\bar{A} \cap B) = 0,4 \times 0,3 + 0,6 \times 0,4 = 0,36$

4) $p(A \cup B) = 0,64$: VRAI

justification : $p(A \cup B) = 1 - p(\bar{A} \cap \bar{B}) = 1 - 0,6 \times 0,6 = 0,64$ **Exercice 2.**

1) Le discriminant de l'équation est

$$\Delta = (1+i)^2 a^2 - 4i^2 a^2 = (1+2i+i^2)a^2 - 4ia^2 = (2i-4i)a^2 = -2ia^2$$

$$\Delta = 2a^2 e^{-i\frac{\pi}{2}} = \left(a\sqrt{2} e^{-i\frac{\pi}{4}} \right)^2 = \left(a\sqrt{2} \left(\cos\frac{-\pi}{4} + i\sin\frac{-\pi}{4} \right) \right)^2 = \left(a\sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right)^2 = (a-ia)^2$$

Les deux solutions de l'équation sont donc :

$$z_1 = \frac{1+i-a+ia}{2} = \frac{1-a}{2} + i\frac{1+a}{2} ; z_2 = \frac{1+i+a-ia}{2} = \frac{1+a}{2} + i\frac{1-a}{2}$$

2) a) Le triangle OAB est rectangle isocèle en O : en effet $OA = |a| = a$ et

$$OB = |ia| = |i||a| = a ; \widehat{(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})} \equiv \arg(ia) - \arg(a) \equiv \frac{\pi}{2} \quad [2\pi]$$

b) Soit z_C l'affixe de C ; on a $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ donc $z_C = z_a + z_b = a + ia = a(1+i)$ 3) a) P est image de A par la rotation de centre O, d'angle $\frac{\pi}{3}$ donc

$$z_P = a \left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} \right) = a \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

b) Q est image de C par la rotation de centre A, d'angle $-\frac{\pi}{3}$ donc

$$z_Q - z_A = \left(\cos\frac{-\pi}{3} + i\sin\frac{-\pi}{3} \right) (z_C - z_A) = \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) ia$$

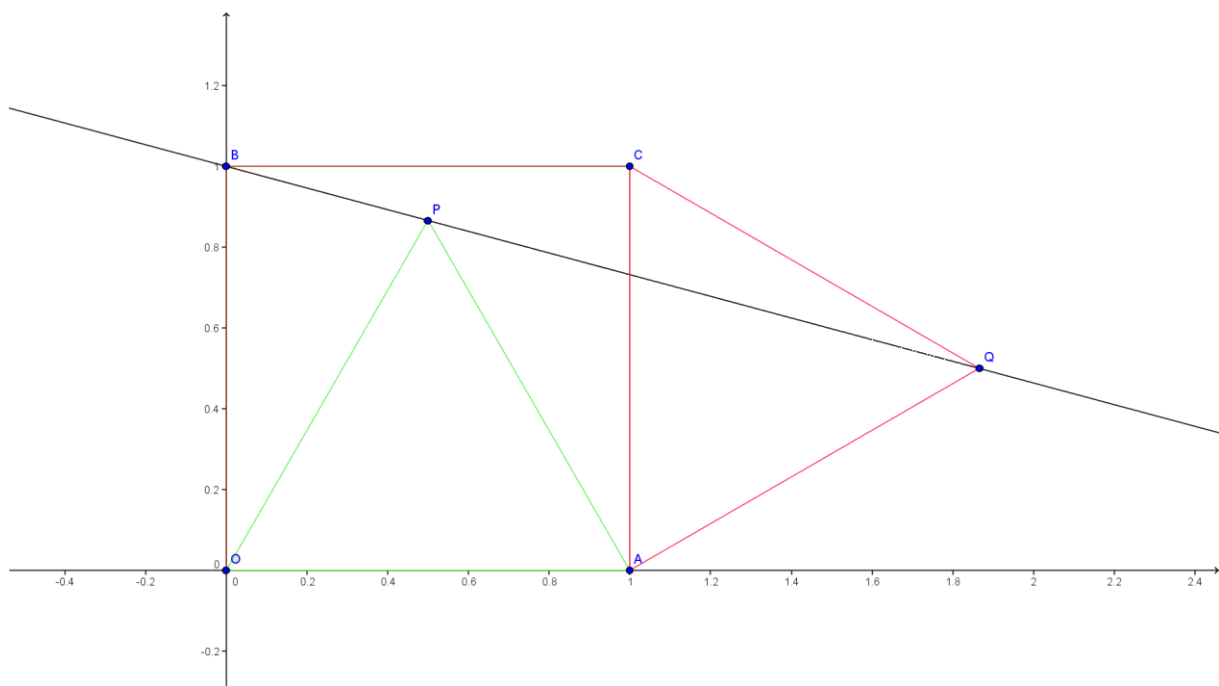
$$z_Q = a + \frac{1}{2}ia - \frac{\sqrt{3}}{2}i^2a = \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)a + \frac{1}{2}ia$$

c) L'affixe du vecteur $\overrightarrow{BP}$ est $z_{\overrightarrow{BP}} = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)a - ia = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}-2}{2}\right)a$;

de même : $z_{\overrightarrow{BQ}} = \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)a - ia = \left(\frac{\sqrt{3}+2}{2} - \frac{1}{2}i\right)a$; leur quotient est :

$$\begin{aligned} \frac{\frac{\sqrt{3}+2}{2} - \frac{1}{2}i}{\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}-2}{2}} &= \frac{\sqrt{3}+2-i}{1+i(\sqrt{3}-2)} = \frac{(\sqrt{3}+2-i)(1-i(\sqrt{3}-2))}{1+(\sqrt{3}-2)^2} = \frac{\sqrt{3}-3i+2i\sqrt{3}+2-2i\sqrt{3}+4i-i-\sqrt{3}+2}{8-4\sqrt{3}} \\ &= \frac{4}{8-4\sqrt{3}} = \frac{1}{2-\sqrt{3}} \end{aligned}$$

Le rapport des affixes des deux vecteurs étant un réel, ces deux vecteurs sont colinéaires, donc B, P, Q sont alignés.



Exercice 3.

1) a) $7 \times 9 + 18 \times (-3) = 9$ [1], donc $(9, -3)$ est une solution particulière.

b) Un couple d'entiers (x, y) est solution si et seulement si $7x + 18y = 9$, ce qui équivaut, en soustrayant [1], à $7(x - 9) + 18(y + 3) = 0$, ou encore $7(x - 9) = -18(y + 3)$

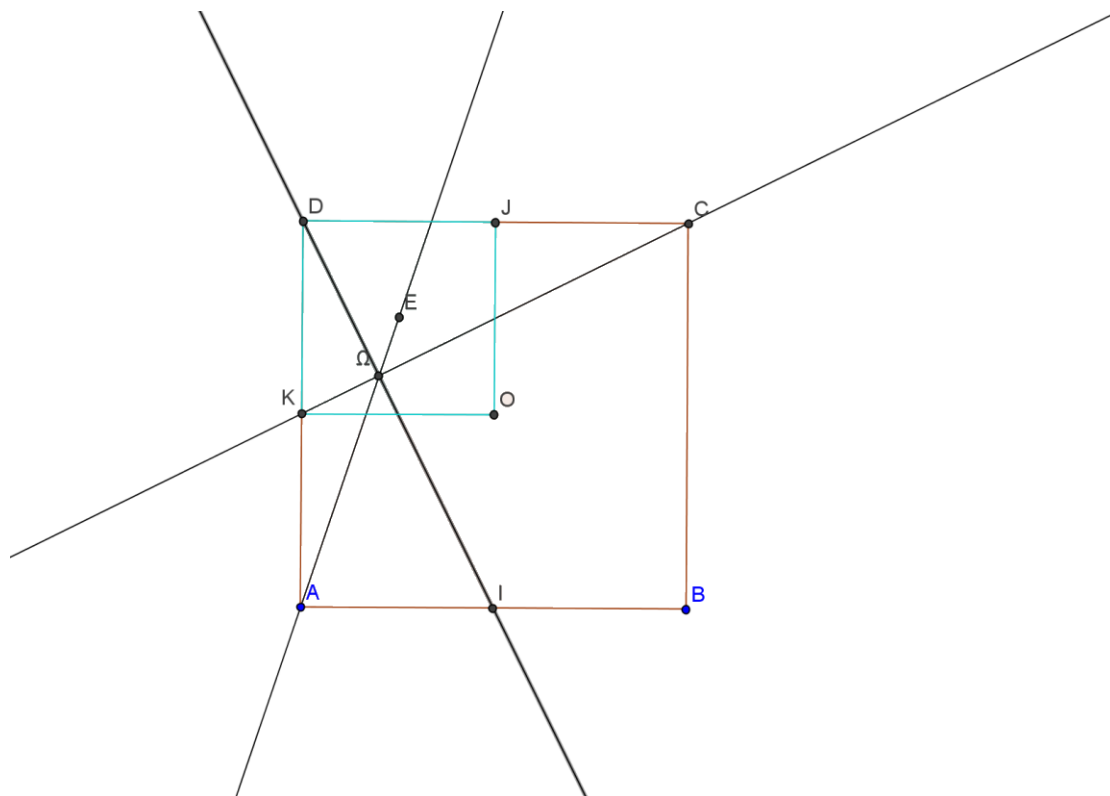
7 divise le 1^{er} membre, donc aussi le second, et ne divise pas 18 : donc 7 divise $y + 3$; il est donc nécessaire qu'il existe un entier k tel que $y + 3 = 7k$, soit $y = 7k - 3$; alors on a $7(x - 9) = -18 \times 7k$, soit $x = -18k + 9$; les couples solutions sont donc nécessairement de la forme $(-18k + 9, 7k - 3)$ (k entier quelconque). Réciproquement on vérifie que tout couple

Réciproquement on vérifie que tout couple de cette forme est solution, car

$$7(-18k + 9) + 18(7k - 3) = -7 \times 18k + 7 \times 18k + 63 - 54 = 9$$

2) n est solution du système si et seulement si il existe a et b entiers tels que $n = 6 + 7a = 15 + 18b$, soit par soustraction $9 = 18b - 7a$, ou $7a - 18b = 9$.

D'après la question 1, ceci équivaut à $a = x = -18k + 9$ et $b = -y = -7k + 3$; on conclut que n est solution si et seulement si $n = 6 + 7(-18k + 9) = -126k + 69$ (on peut vérifier, par l'autre égalité, qu'on obtient bien la même expression : $n = 15 + 18(-7k + 3) = -126k + 69$)

Exercice 4.

1) $S([AB]) = [OJ]$; $OJ = \frac{1}{2}BC$ donc le rapport de S est $\frac{1}{2}$; $\widehat{(AB, OJ)} = \frac{\pi}{2} \quad [2\pi]$

donc l'angle de S est $\frac{\pi}{2}$.

2) a) Une similitude conserve les angles ; la droite (BC) est perpendiculaire à (AB) en B , donc $S(BC)$ est la perpendiculaire à (OJ) en J , c'est-à-dire (CD) .

(AC) fait un angle de $\frac{\pi}{4}$ avec (AB) , en A , donc $S(AC)$ fait un angle de $\frac{\pi}{4}$ avec OJ , en O ;

c'est donc la droite (OD) (ou (BD)).

b) $C = (BC) \cap (AC)$ donc $S(C) = S(BC) \cap S(AC) = (CD) \cap (BD) = D$

3) a) $S(A)=O$, $S(B)=J$, $S(C)=D$, donc l'image du carré $ABCD$ est le carré ayant pour sommets O, J, D ; son 4^{ème} sommet est K .

b) $S(ABCD) = OJDK$ donc $S(D)=K$.

c) Soit Ω le centre de S ; SoS est la similitude de centre Ω , de rapport $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ et

d'angle $\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$; or $SoS(C)=S(D)=K$; donc $\overrightarrow{\Omega K} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{\Omega C}$; donc Ω est le barycentre

de $(K, 4)$ et $(C, 1)$.

d) $SoS(A) = S(O)$; O est le centre du carré $ABCD$ donc $S(O)$ est le centre du carré $OJDK$, c'est-à-dire E .

e) D'après c), $\overrightarrow{K\Omega} = \frac{1}{5}\overrightarrow{KC}$, ce qui permet de placer Ω sur la figure.

Remarque : si on exige une construction à la règle et au compas, on peut remarquer que,

l'angle de la similitude étant $\frac{\pi}{2}$, $(\Omega C) \perp (\Omega D)$ et $(\Omega K) \perp (\Omega D)$, c'est-à-dire que les

triangles ΩCD et ΩKD sont rectangles en Ω ; Ω est donc le 2^{ème} point d'intersection des cercles de diamètres $[DC]$ et $[DK]$.

4) $E = SoS(A)$, et SoS a pour angle π , donc Ω, A, E sont alignés : (AE) passe par Ω ; de même $K = SoS(C)$ donc (KC) passe par Ω ; d'autre part $S(C) = D$, donc $(\Omega C) \perp (\Omega D)$, et

la rotation de centre O , d'angle $\frac{\pi}{2}$ transforme DKC en AID , donc $(DI) \perp (KC)$, ou

$(DI) \perp (\Omega C)$; (ΩD) et (DI) sont perpendiculaires à (ΩC) en Ω , donc sont confondues, donc Ω est sur (DI) . Conclusion : (AE) , (CK) et (DI) sont concourantes en Ω .

Exercice 5.

1) a) On sait que $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = 0$, donc $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 1 + 0 - 0 = 1$

$g(x) = 1 + x(1 - \ln x)$; on sait que $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - \ln x) = -\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$

La dérivée de g est définie par $g'(x) = 1 - \left(1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x}\right) = -\ln x$; elle s'annule donc en 1,

est positive sur $]0, 1[$, négative sur $]1, +\infty[$; $g(1) = 2$; d'où le tableau de variation de g :

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$	+	0	-
$g(x)$	1	2	$-\infty$

b) Sur $]0, 1]$ $g(x)$ croît de 1 à 2, donc ne prend pas la valeur 0 ; sur $[1, +\infty[$, g est continue, et $g(x)$ décroît de 2, valeur positive, à $-\infty$, donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires elle prend une et une seule fois la valeur 0, pour une valeur x_0 de la variable. Un calcul à la calculatrice montre que $g(3,5) \approx 0,115 > 0$, et $g(3,6) \approx -0,11 < 0$; donc $3,5 \leq x_0 \leq 3,6$

c) On en déduit que g est strictement positive sur $]0, x_0[$, nulle en x_0 , négative sur $]x_0, +\infty[$

$$2) a) f'(x) = \frac{\frac{1}{x}(1+x^2) - \ln x(2x)}{(1+x^2)^2} = \frac{1+x^2 - x^2 \cdot 2 \ln x}{x(1+x^2)^2} = \frac{1+x^2 - x^2 \ln(x^2)}{x(1+x^2)^2} = \frac{g(x^2)}{x(1+x^2)^2}$$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$; la fonction $\ln$ croît moins vite que toute fonction polynôme donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

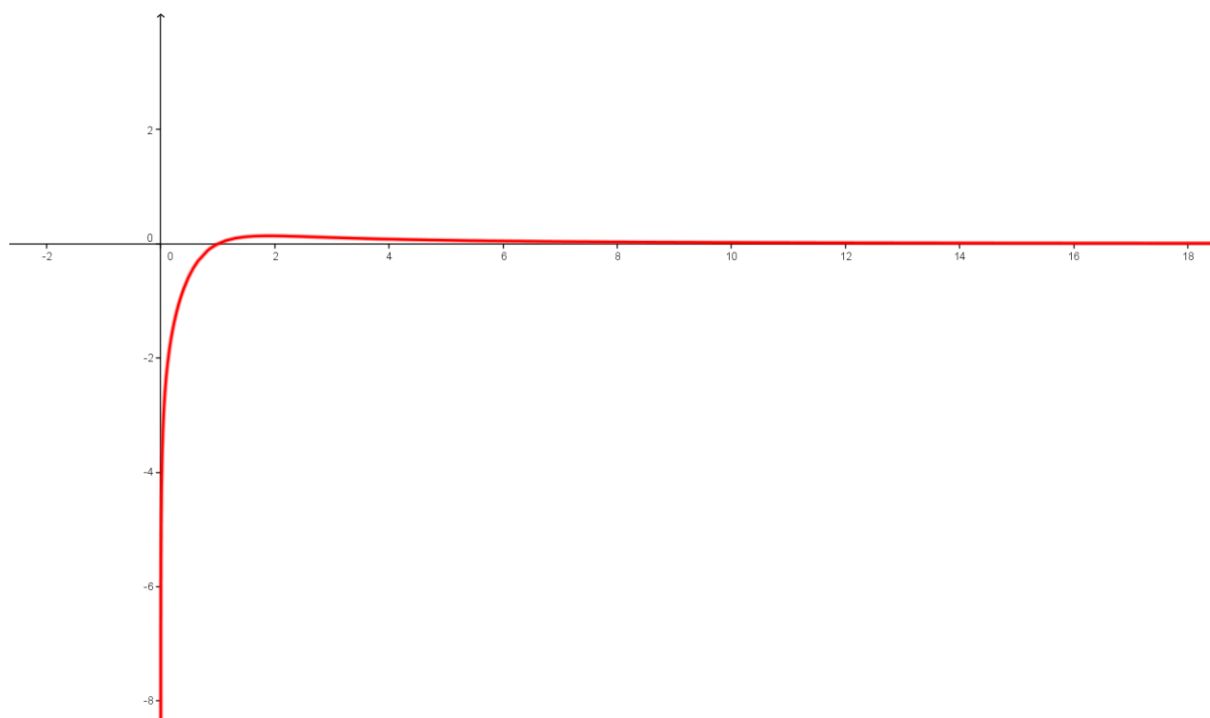
$f'(x)$ est du signe de $g(x^2)$, donc strictement positive si $x^2 < x_0$, c'est-à-dire si $x < \sqrt{x_0}$; nulle si $x = \sqrt{x_0}$, strictement négative si $x > \sqrt{x_0}$; d'où le tableau de variation :

x	0	$\sqrt{x_0}$	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$-\infty$	$f(\sqrt{x_0})$	0

$$c) f(\sqrt{x_0}) = \frac{\ln(\sqrt{x_0})}{1+x_0} = \frac{\frac{1}{2} \ln x_0}{1+x_0} ; \text{ or } x_0 \text{ est la solution de } 1+x_0 - x_0 \ln x_0 = 0, \text{ donc}$$

$$1+x_0 = x_0 \ln x_0, \text{ donc } f(\sqrt{x_0}) = \frac{\ln(\sqrt{x_0})}{1+x_0} = \frac{\frac{1}{2} \ln x_0}{x_0 \ln x_0} = \frac{1}{2x_0} \approx \frac{1}{2 \times 3,6} \approx 0,14$$

d)



3) a) $a_{n+1} - a_n = \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n+1}} f(t) dt$; $\frac{1}{n+1}$ et $\frac{1}{n}$ sont dans $]0, 1[$; $f(1) = 0$ et f est strictement croissante sur $]0, 1[$, donc f est strictement négative sur $\left] \frac{1}{n+1}, \frac{1}{n} \right[$, donc $\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n+1}} f(t) dt < 0$, donc $\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n+1}} f(t) dt > 0$: la suite (a_n) est croissante.

b) Sur $]0, 1[$, on a $1 < 1+x^2 < 2$ donc $\frac{1}{2} < \frac{1}{1+x^2} < 1$, et $\ln x < 0$, donc $\ln x < \frac{\ln x}{1+x^2} < \frac{\ln x}{2}$

c) D'après b), $\int_1^{\frac{1}{n}} \ln t dt \leq a_n \leq \frac{1}{2} \int_1^{\frac{1}{n}} \ln t dt$

$$\int_1^{\frac{1}{n}} \ln t dt = \left(\frac{1}{n} \ln \frac{1}{n} - \frac{1}{n} \right) - (1 \times 0 - 1) = 1 - \frac{1 + \ln n}{n} ; \text{ donc } \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1 + \ln n}{n} \right) \leq a_n \leq 1 - \frac{1 + \ln n}{n}$$

d) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1 + \ln n}{n} \right) = 1$; la suite (a_n) est donc majorée par 1, et croissante, donc elle converge ; et sa limite appartient à l'intervalle $\left[\frac{1}{2}, 1 \right]$