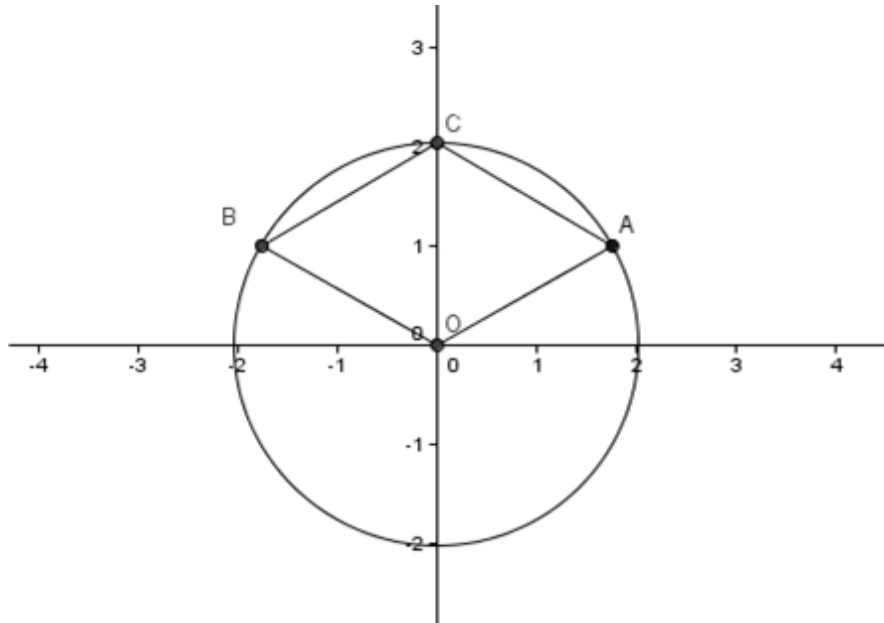


Exercice 1 : c) ; a) ; b)

Exercice 2 :

1)



On a :

$\frac{z_A + z_B}{2} = 1$ et $\frac{z_O + z_C}{2} = 1$ donc les segments $[AB]$ et $[OC]$ ont même milieu donc le quadrilatère $OACB$ est un parallélogramme .

D'autre part : l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est $z_B - z_C = -2\sqrt{3}$ et l'affixe du vecteur $\overrightarrow{OC}$ est $z_C = 2i$.

Ainsi : $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -2\sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{OC} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$; il en résulte que le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OC} = 0$ d'où $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{OC}$.

Les diagonales du parallélogramme $OACB$ sont perpendiculaires donc $OACB$ est un losange.

2) a) Soit dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^2 - 2iz - 4 = 0$.

Son discriminant réduit est $\Delta' = (-i)^2 - (-4) = 3$.

Les solutions de (E) sont donc : $z' = \sqrt{3} + i$ et $z'' = -\sqrt{3} + i$.

$$b) \quad z' = \sqrt{3} + i = 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right) = 2e^{i\frac{\pi}{6}} \quad \text{et} \quad z'' = -\sqrt{3} + i = 2 \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right) = 2e^{i\frac{5\pi}{6}} .$$

3) a) $P(2i) = (2i)^3 - 4i(2i)^2 - 8(2i) + 8i = -8i + 16i - 16i + 8i = 0.$

b) Pour tout nombre complexe z ,

$$P(z) = (z - 2i)(z^2 + mz + p) = z^3 + (m - 2i)z^2 + (p - 2im)z - 2ip$$

D'où et par identification :

$$\begin{cases} m - 2i = -4i \\ p - 2im = -8 \\ -2ip = 8i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -2i \\ p = -4 \end{cases}$$

c) On a ainsi, pour tout nombre complexe z : $P(z) = (z - 2i)(z^2 - 2iz - 4).$

Par conséquent, $P(z) = 0 \Leftrightarrow (z - 2i)(z^2 - 2iz - 4) = 0 \Leftrightarrow z = 2i \text{ ou } z^2 - 2iz - 4 = 0.$

Il en résulte que l'ensemble de solutions de l'équation $P(z) = 0$ est $\{2i, \sqrt{3} + i, -\sqrt{3} + i\}.$

Exercice 3

1) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x+1}{x} = +\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{1}{x} = 1$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ln 1 = 0.$

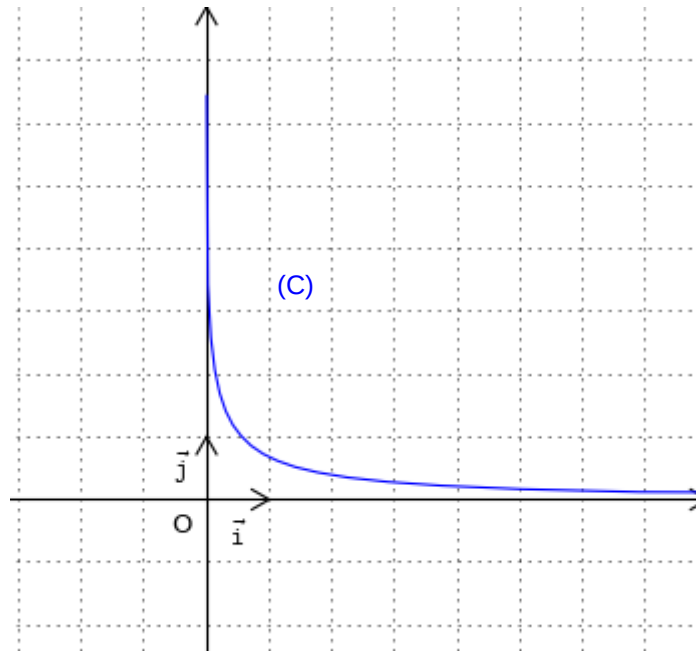
Donc La droite $(O, \vec{j})$ est asymptote à La courbe représentative (C) de f et la droite $(O, \vec{i})$ est asymptote à (C) au voisinage de $+\infty.$

2) a) Pour tout x de $]0, +\infty[$, $f'(x) = \frac{\frac{-1}{x^2}}{\frac{x+1}{x}} = -\frac{1}{x(x+1)}.$

b) On a : pour tout $x > 0$, $f'(x) < 0$. Le tableau de variation de f est:

x	0	$+\infty$
$f'(x)$		-
$f(x)$	$+\infty$	0

3)



4) a) La fonction f est continue et strictement décroissante sur $]0, +\infty[$ donc f réalise une bijection de $]0, +\infty[$ sur $f(]0, +\infty[) =]0, +\infty[$.

n étant un entier naturel non nul, $\frac{1}{n}$ est donc un élément de $]0, +\infty[$.

Par suite, l'équation $f(x) = \frac{1}{n}$ admet une unique solution x_n dans $]0, +\infty[$.

$$b) f(x) = \frac{1}{n} \Leftrightarrow \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) = \frac{1}{n} \Leftrightarrow \frac{x+1}{x} = e^{\frac{1}{n}} \Leftrightarrow 1 + \frac{1}{x} = e^{\frac{1}{n}} \Leftrightarrow \frac{1}{x} = e^{\frac{1}{n}} - 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{e^{\frac{1}{n}} - 1}.$$

$$c) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_n}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n(e^{\frac{1}{n}} - 1)} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}}} \quad \text{et comme } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \quad \text{alors } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_n}{n} = 1.$$

Exercice 4 :

1) a) On a : $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AD} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD} \begin{pmatrix} -3 \\ 12 \\ 3 \end{pmatrix}$.

b) On a : $\overrightarrow{DC} \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ d'où ABCD est un parallélogramme.

L'aire du parallélogramme ABCD est $\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}\| \text{ ua} = \sqrt{9+144+9} \text{ au} = \sqrt{162} \text{ ua} = 9\sqrt{2} \text{ ua}$.

2) a) $\overrightarrow{AI} \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD})$.

b) $AI = \frac{1}{3}\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}\| = 3\sqrt{2}$ donc la distance AI est égale au rayon de la sphère (S).

Un vecteur normal au plan (P) passant par les points A, B et D est $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}$ colinéaire au vecteur $\overrightarrow{AI}$ donc la droite (AI) est perpendiculaire au plan (P).

Par suite , le plan (P) est tangent à la sphère (S) au point A.