

EXERCICE 1 :

- 1) a) Vrai b) Vrai
2) a) Faux b) Vrai

EXERCICE 2 :

$$\theta \in [0, 2\pi[$$

$$1) z^2 - (4 + e^{i\theta})z + 2(2 + e^{i\theta}) = 0$$

$$\Delta = (4 + e^{i\theta})^2 - 4 \times 2(2 + e^{i\theta}) = 16 + 8e^{i\theta} + e^{i2\theta} - 16 - 8e^{i\theta} = e^{i2\theta}. \text{ donc } \delta = e^{i\theta}$$

$$\text{D'où les solutions sont } z_1 = \frac{4 + e^{i\theta} - e^{i\theta}}{2} = 2 \text{ et } z_2 = \frac{4 + e^{i\theta} + e^{i\theta}}{2} = 2 + e^{i\theta}$$

$$S_C = \{2, 2 + e^{i\theta}\}$$

$$2) z_I = 2 \text{ et } z_M = 2 + e^{i\theta}.$$

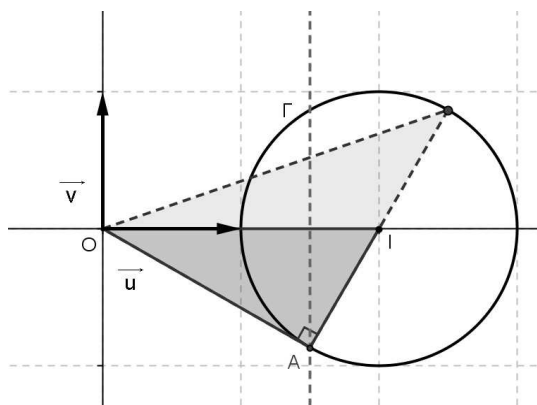
$$|z_M - z_I| = |2 + e^{i\theta} - 2| = |e^{i\theta}| = 1 \Leftrightarrow IM = 1 \text{ d'où } M \text{ appartient au cercle } (\Gamma) \text{ de centre } I \text{ et de rayon } 1.$$

$$3) a) z_A = \frac{3}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$IA = |z_A - z_I| = \left| \frac{3}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} - 2 \right| = \left| -\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right| = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1 \text{ ainsi } A \text{ est un point de } (\Gamma).$$

$$\text{On a : } z_A = \frac{3}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} = 2 - \frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} = 2 + e^{i \frac{4\pi}{3}} \text{ } z_A \text{ est de la forme } z_M = 2 + e^{i\theta} \text{ avec } \theta = \frac{4\pi}{3}$$

Ainsi M est un point de (Γ) .



$$b) \frac{z_{\overline{AI}}}{z_{\overline{AO}}} = \frac{-\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{3}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\frac{i}{\sqrt{3}} \left(i \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2} \right)}{-\frac{3}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{i}{\sqrt{3}} \text{ d'où } \frac{z_{\overline{AI}}}{z_{\overline{AO}}} \text{ est imaginaire pur donc } \overline{AI} \perp \overline{AO} \text{ ainsi le triangle } OAI \text{ est rectangle en } A.$$

c) OAM est rectangle en A donc $(AM) \perp (AO)$ et comme $(AI) \perp (AO)$ donc $(AM) \parallel (AO)$ et par suite $M \in (AO)$ et comme $M \in (\Gamma)$ d'où M est le point diamétralement opposé à A sur (Γ) .

$$\begin{aligned} \text{Ainsi } \frac{z_A + z_M}{2} = z_I &\Leftrightarrow z_M + z_A - 2z_I = 0 \Leftrightarrow 2 + e^{i\theta} + \frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} - 4 = 0 \\ &\Leftrightarrow -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} + \cos\theta + i\sin\theta = 0 \Leftrightarrow \cos\theta + i\sin\theta = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \text{Donc } \cos\theta &= \frac{1}{2} \text{ et } \sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} ; \theta \in [0, 2\pi[\text{ D'où } \theta = \frac{\pi}{3} \end{aligned}$$

EXERCICE 3 :

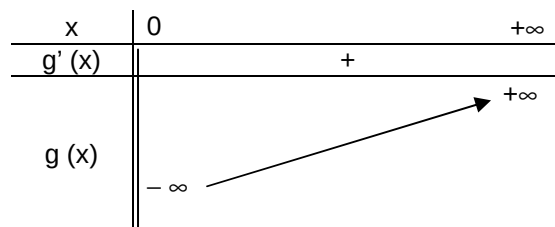
1) soit g la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $g(x) = 1 - \frac{1}{x} + \ln x$

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 - \frac{1}{x} + \ln x = -\infty ; \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - \frac{1}{x} + \ln x = +\infty$$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \frac{1}{x} + \ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{\ln x}{x} = 0$ la courbe (C) admet au voisinage de $+\infty$ une branche infinie parabolique de direction celle de $(O, \vec{i})$.

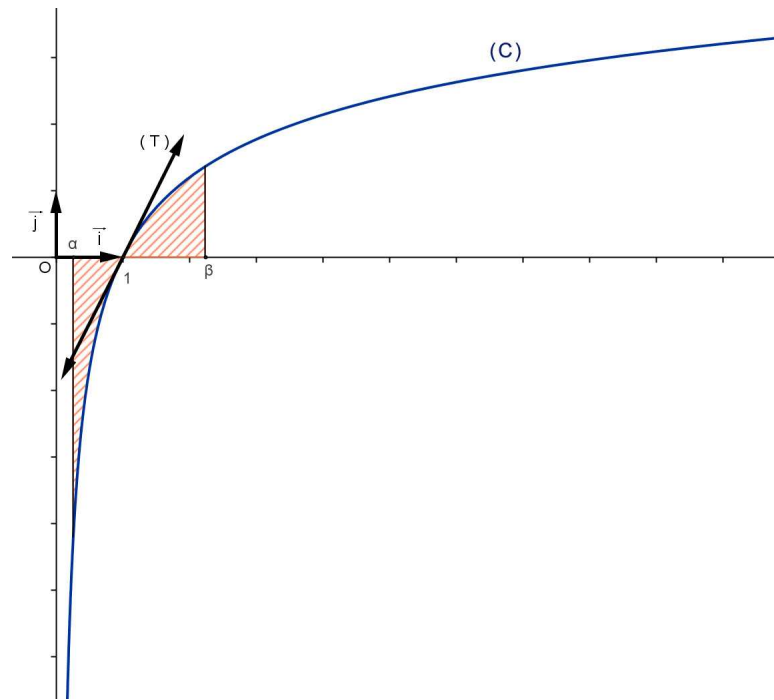
c) la fonction $x \mapsto \ln x$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et la fonction $x \mapsto 1 - \frac{1}{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ ainsi la fonction g est dérivable sur $]0, +\infty[$. Pour tout $x \in]0, +\infty[$; $g'(x) = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} = \frac{1+x}{x^2}$

d) Pour tout $x \in]0, +\infty[$; $g'(x) = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} = \frac{1+x}{x^2}$ donc $g'(x) > 0$ et par suite g est strictement croissante sur $]0, +\infty[$.



2) a) (T): $y = g'(1)(x-1) + g(1)$ d'où (T): $y = 2x - 2$

b)



3) soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = -1 + (x-1)\ln x$

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		0	
		-	+
$f(x)$	$+\infty$	-1	$+\infty$

a) f est continue et strictement décroissante sur $]0, 1[$ et $f(]0, 1[) =]-1, +\infty[$, $0 \in]-1, +\infty[$ ainsi l'équation $f(x) = 0$ admet une seule solution α sur $]0, 1[$.

De même f est continue et strictement décroissante sur $]1, +\infty[$ et $f(]1, +\infty[) =]-1, +\infty[$, $0 \in]-1, +\infty[$ ainsi l'équation $f(x) = 0$ admet une seule solution β sur $]1, +\infty[$.

b) $f(0,2) = 0,29$ et $f(0,3) = -0,16$ ainsi $f(0,2) \times f(0,3) < 0$ donc $0,2 < \alpha < 0,3$

$f(2,2) = -0,05$ et $f(2,3) = 0,08$ ainsi $f(2,2) \times f(2,3) < 0$ donc $2,2 < \beta < 2,3$

4) a) voir figure ci-dessus.

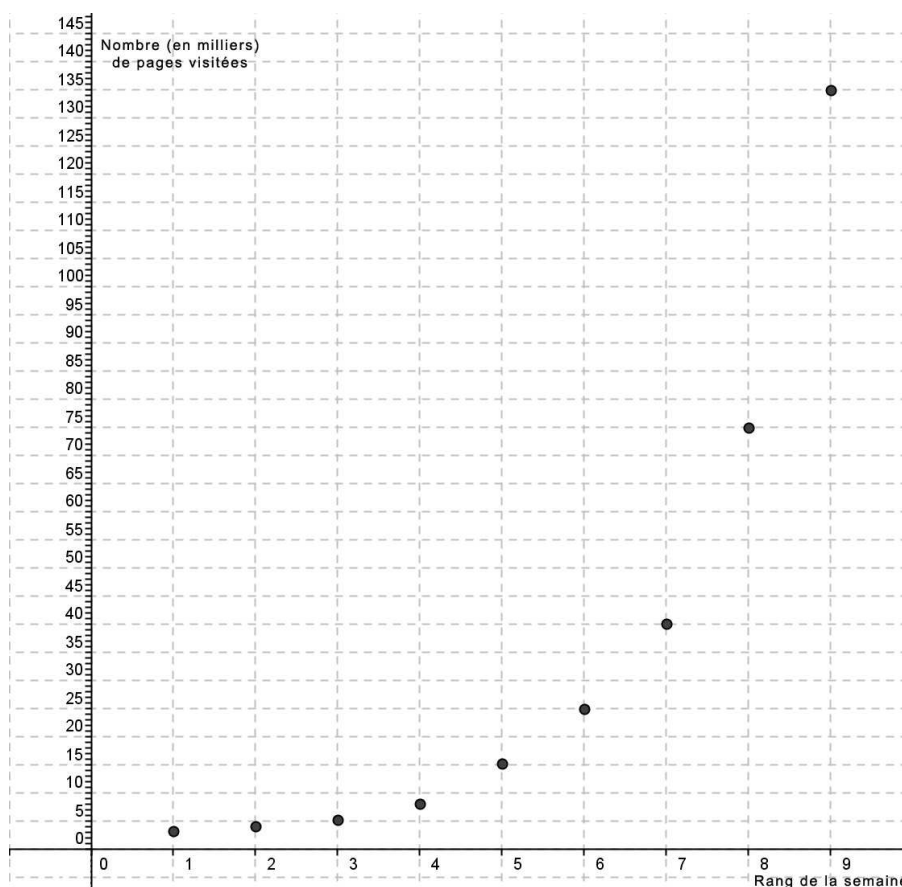
b) f est dérivable sur $]0, +\infty[$. Pour tout $x \in]0, +\infty[$; $f'(x) = \ln x + (x-1)\frac{1}{x} = 1 - \frac{1}{x} + \ln x = g(x)$

$$\text{c) } \mathcal{A} = \int_{\alpha}^{\beta} |g(x)| dx = \int_{\alpha}^1 |g(x)| dx + \int_1^{\beta} |g(x)| dx = \int_{\alpha}^1 -g(x) dx + \int_1^{\beta} g(x) dx = \int_1^{\alpha} g(x) dx + \int_1^{\beta} g(x) dx$$

$$\text{d) } \mathcal{A} = \int_{\alpha}^{\beta} |g(x)| dx = \int_1^{\alpha} g(x) dx + \int_1^{\beta} g(x) dx = \int_1^{\alpha} f'(x) dx + \int_1^{\beta} f'(x) dx = [f(x)]_1^{\alpha} + [f(x)]_1^{\beta} \\ = f(\alpha) - f(1) + f(\beta) - f(1) = -2f(1) = 2 \text{ u.a}$$

EXERCICE 4 :

1)



2) a)

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$z_i = \ln y_i$	1,1	1,39	1,61	2,08	2,71	3,22	3,69	4,32	4,91

b) $r = 0,99$ c) $\Delta : z = 0,49x + 0,34$ d) $z = 0,49x + 0,34 \Leftrightarrow \ln y = 0,49x + 0,34 \Leftrightarrow y = e^{0,49x+0,34}$ ainsi $y = e^{0,49x} e^{0,34}$ D'où $y = 1,4e^{0,49x}$ e) pour $x = 12$ on a $y = 1,4e^{0,49 \times 12} = 500,93$

D'où le nombre des pages visitées durant la douzième semaine est 501.