

EXERCICE 1 :

1) $z_A = 1 + 3i$, $z_B = z^2$ et $z_C = iz$

B est le milieu du segment $[AC] \Leftrightarrow z_B = \frac{z_A + z_C}{2} \Leftrightarrow 2z_B - z_A - z_C = 0 \Leftrightarrow 2z^2 - iz - 1 - 3i = 0$

Ainsi B est le milieu de $[AC] \Leftrightarrow z$ est solution de l'équation (E): $-2z^2 + iz + 1 + 3i = 0$

2) a) $(4 + 3i)^2 = 16 - 9 + 24i = 7 + 24i$

b) (E): $-2z^2 + iz + 1 + 3i = 0$

$\Delta = i^2 - 4 \times (-2) \times (1 + 3i) = -1 + 8 + 24i = 7 + 24i = (4 + 3i)^2$

Ainsi $\delta = 4 + 3i$ est une racine carrée de Δ

Les solutions de (E) sont : $z_1 = \frac{-i + 4 + 3i}{-4} = -1 - \frac{1}{2}i$ et $z_2 = \frac{-i - 4 - 3i}{-4} = 1 + i$

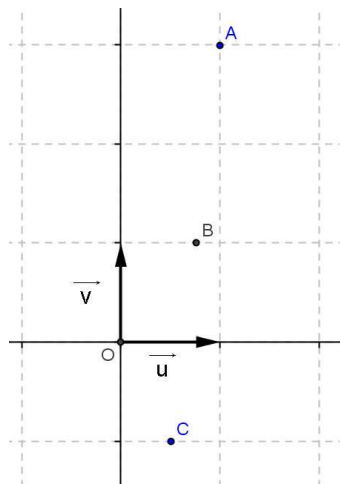
$S_C = \left\{ -1 - \frac{1}{2}i, 1 + i \right\}$

3) $z = -1 - \frac{1}{2}i$

a) $iz = i \left(-1 - \frac{1}{2}i \right) = -i + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - i$

b) $z_A = 1 + 3i$ et $z_C = \frac{1}{2} - i$

il suffit de remarquer que B est le milieu de $[AC]$

**EXERCICE 2 :**

la suite u définie sur $\mathbb{N}$ par :
$$\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ u_n = u_{n-1}^2 + 2u_{n-1}, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

1) a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n + 1 = u_{n-1}^2 + 2u_{n-1} + 1 = (u_{n-1} + 1)^2$

b) Pour $n = 0$ $u_0 = \frac{1}{2} > -1$

Supposons que pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n > -1$ et montrons que $u_{n+1} > -1$

$u_{n+1} + 1 = (u_n + 1)^2 > 0$ car $u_n > -1$ ainsi $u_{n+1} > -1$

donc pour tout entier naturel n ; $u_n > -1$

2) a) v est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $v_n = \ln(1 + u_n)$

$v_{n+1} = \ln(1 + u_{n+1}) = \ln((1 + u_n)^2) = 2\ln(1 + u_n)$ d'où v est une suite géométrique de raison $q = 2$ et de premier terme

2) a) v est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $v_n = \ln(1+u_n)$

$v_{n+1} = \ln(1+u_{n+1}) = \ln((1+u_n)^2) = 2\ln(1+u_n)$ d'où v est une suite géométrique de raison $q = 2$ et de premier terme

$$v_0 = \ln(1+u_0) = \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln 2$$

b) $v_n = v_0 q^n = -\ln(2) \times (2)^n$

$$v_n = \ln(1+u_n) \Leftrightarrow e^{v_n} = 1+u_n \text{ d'où } u_n = e^{v_n} - 1 = e^{-\ln(2) \times (2)^n} - 1$$

c) $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} (e^{v_n} - 1) = \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-\ln(2) \times (2)^n} - 1$ or $\lim_{n \rightarrow +\infty} -\ln(2) \times (2)^n = -\ln(2) \lim_{n \rightarrow +\infty} (2)^n = -\infty$

ainsi $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-\ln(2) \times (2)^n} = 0$ et par suite $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -1$

EXERCICE 3 :

1) a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -3 & 3 & 2 \\ 9 & -4 & -1 \end{pmatrix}$

$$A \times B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = 5 I_3$$

b) $A \times B = 5 I_3 \Leftrightarrow A \times \left(\frac{1}{5} B\right) = I_3$ donc A est inversible et son inverse est la matrice $A^{-1} = \frac{1}{5} B$

2) Soit la fonction définie par $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$

a) la tangente à (C) au point d'abscisse 1 a pour équation $y = 4x - 4$ donc $f'(1) = 4$ et $f(1) = 0$

(C) admet un point d'inflexion d'abscisse -1 donc $f''(-1) = 0$

Or $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ et $f''(x) = 6ax + 2b$

D'où le système
$$\begin{cases} a + b + c = 0 \\ 3a + 2b + c = 4 \\ -6a + 2b = 0 \end{cases}$$
 d'où a, b et c sont les solutions du système (S) :
$$\begin{cases} a + b + c = 0 \\ 3a + 2b + c = 4 \\ -3a + b = 0 \end{cases}$$

b) une écriture matricielle du système (S) est
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow A \times X = M$$

$$A \times X = M \Leftrightarrow X = A^{-1} \times M = \frac{1}{5} B \times M \text{ d'où } \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -3 & 3 & 2 \\ 9 & -4 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 \\ 12 \\ -16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} \\ \frac{12}{5} \\ -\frac{16}{5} \end{pmatrix}$$

D'où
$$\begin{cases} a = \frac{4}{5} \\ b = \frac{12}{5} \\ c = -\frac{16}{5} \end{cases}$$
 et par suite $f(x) = \frac{4}{5}x^3 + \frac{12}{5}x^2 - \frac{16}{5}x$

EXERCICE 4 :

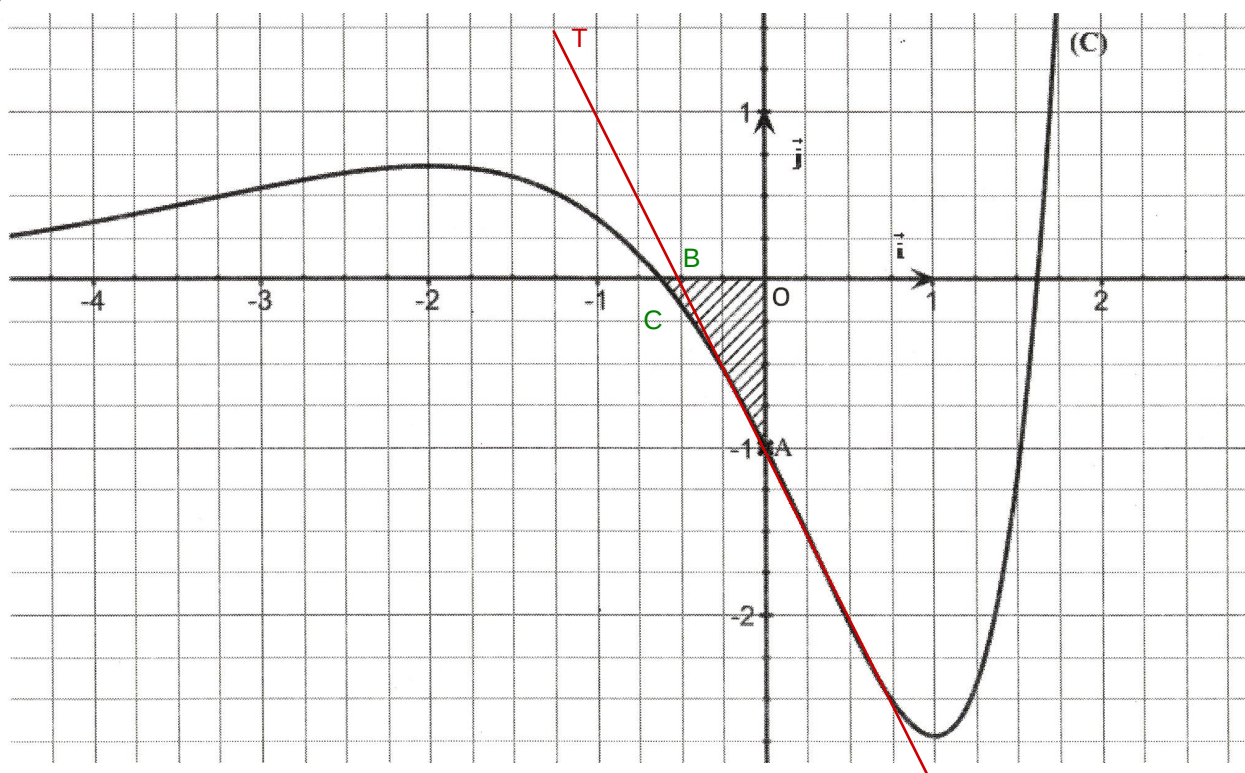
1) Voir figure ci dessous.

2) a) $f(0) = -1$ et $f'(0) = -2$ b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$

c)

x	$-\infty$	-2	1	$+\infty$	
f'(x)	+	0	-	0	+
f(x)	0	$f(-2)$	$f(1)$	$+\infty$	

3) a)



b) OAB est un triangle rectangle en O donc $\mathcal{A}_{OAB} = \frac{OA \times OB}{2} = \frac{1 \times \frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{4} \text{ u.a}$

De même Pour OAC donc $\mathcal{A}_{OAC} = \frac{OA \times OC}{2} = \frac{1 \times \frac{3}{4}}{2} = \frac{3}{8} \text{ u.a}$

c) $\mathcal{A}_{OAB} \leq \mathcal{A} \leq \mathcal{A}_{OAC} \Leftrightarrow \frac{1}{4} \leq \mathcal{A} \leq \frac{3}{8}$ d'où $2 \leq 8\mathcal{A} \leq 3$