Exercice 1 (4 points)

Répondre par **Vrai** ou **Faux** aux propositions suivantes en justifiant la réponse.

1. $x^2 + 3x \equiv 0 \pmod 7$ si, et seulement si, $x \equiv 0 \pmod 7$ ou $x \equiv 4 \pmod 7$.

2. a , b et c sont trois entiers naturels.

si $a \equiv 0 (\bmod b)$ et $b \equiv 0 (\bmod c)$ alors $a \equiv 0 (\bmod c)$.

3. Pour tout entier naturel n non nul, le chiffre des unités de 2013^{28} est 4.

Exercice 2 (5 points)

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On donne les points $\Omega(1, 0)$.

1. Soit Γ l'ensemble des points M dont les coordonnées (x, y) vérifient $y^2 - 4x + 4 = 0$.
   a- Montrer que Γ est une parabole dont on précisera le sommet, le foyer F et la directrice.
   b- Montrer que l'équation cartésienne de la tangente (T) à Γ en son point A d'abscisse 2 et d'ordonnées positive est $y = x$.
   c- Tracer Γ et T.
2. Soit Δ la droite d'équation $x = 1 + 3\sqrt{2}$ et Γ' la conique de foyer $F'\left(1 + \frac{3}{\sqrt{2}}, 0\right)$, de directrice associée Δ et d'excentricité $\frac{1}{\sqrt{2}}$.
   a- Quelle est la nature de Γ' puis vérifier qu'une équation de Γ' est $(x-1)^2 + 2y^2 = 9$.
   b- Montrer que les coniques Γ et Γ' sec coupent en A et en au autre point B dont on déterminera les coordonnées.
   c- Soit H le projeté de A sur la droite des ordonnées, montrer que H appartient à Γ'.
   Tracer Γ' dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
3. Soit V le volume engendré par rotation autour de l'axe des abscisses de la réunion des arcs ΩA de la parabole Γ et de HA de Γ'.
   Calculer V.

Exercice 3 (5 points)

Soit un triangle équilatéral ABC tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$. On désigne par I, J, K les milieux respectifs des segments [BC], [CA] et [AB] et par D = $S_J(K)$.

1. Soit S similitude directe qui transforme D en A et J en B.

a- Déterminer la rapport et l'angle de S.

b- Montrer que C est le centre de S.

2. Soit g la similitude indirecte qui transforme D en C et C en B.

a- Déterminer le rapport de g

b- Soit Ω le centre de g, Déterminer $g \circ g(D)$, En déduire que $g \circ g$ est une homothétie que l'on caractérisera.

c- La droite (DB) coupe (IK) en E et (AC) en F et soit H=S_D (F).

Montrer que $\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{FE} = \overrightarrow{EB}$. En déduire que $\overrightarrow{DB} = 3\overrightarrow{DF}$ et que $\overrightarrow{HB} = \overrightarrow{HD}$.

d- Prouver alors que Ω = H.

e- Montrer que l'axe Δ de g est la médiatrice de [CF].

3- Soit f = go S^{-1}.

a- Déterminer f(A) et f(C).

b- En déduire que f est une symétrie glissée que l'on caractérisera.

Exercice 4 (6 points)

On considère les deux fonctions f et g définies sur $]0,+\infty[$ par $f(x) = 2x + \dfrac{1-\ln x}{x}$ et $g(x) = 2x^2 - 2 + \ln x$ et on désigne par (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

A-1. Montrer que g est strictement croissante sur $]0,+\infty[$.

2. Calculer g(1) et en déduire, suivant les valeurs de x , le signe de g(x).

B- 1. a- Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et déduire une asymptote à (C).

b- Prouver que la droite (D) d'équation y = 2x est une asymptote à (C) et étudier, suivant les valeurs de x, la position relative de (C) et (D).

2. a- Vérifier que pour tout x > 0, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$.

b- Dresser le tableau de variation de f.

3. Tracer (D) et (C).

4. pour tout entier naturel n, On pose : $U_n = \int_{e^n}^{e^{n+1}} \left(f(x) - 2x\right)dx$.

a- Calculer U_n et prouver que (U_n) est une suite arithmétique dont précisera la raison.

b- Soit A l'aire, en unités d'aire , de la partie du plan limitée par (C), (d) et les deux droites d'équations x = 1 et x = e^2 .

Vérifier que A = $U_0 - U_1$.

C- On définit sur $\left]0,+\infty\right[$ une fonction h par h(x) = $x^2\left(1+\ln x\right)-3x+2$.

1. Montrer que h est prolongeable par continuité en 0.
2. Démontrer que pour tout x > 0, $\frac{h(x)}{x} = f\left(\frac{1}{x}\right) - 3$ et prouver que h(x) ≥ 0 .
3. Préciser la valeur de x pour laquelle h(x) = 0.

Corrigé

Exercice 1 :

1. Vrai

Reste de x modulo 7	0	1	2	3	4	5	6
Reste de x^2 modulo 7	0	1	4	2	2	4	1
Reste de 3x modulo 7	0	3	6	2	5	1	4
Reste de x^2+3x modulo 7	0	4	3	4	0	5	5

Ainsi $x^2+3x\equiv 0(\text{mod}7)\Leftrightarrow x\equiv 0(\text{mod}\,7)$ ou $x\equiv 4(\text{mod}\,7)$

2. Vrai

Si $a\equiv 0(\text{mod}\,b)$ et $b\equiv 0(\text{mod}\,c)$

alors il existe deux entiers naturels k et k' tels que a = k.b et b = k'.c d'où a =(k.k').c

donc $a\equiv 0(\text{mod}\,c)$

3. Faux

$2013\equiv 3(\text{mod}10)$ donc $2013^{28}\equiv 3^{28}(\text{mod}10)$.

Or $3\equiv 3(\text{mod}10)$, $3^2\equiv 9(\text{mod}10)$, $3^3\equiv 7(\text{mod}10)$ et $3^4\equiv 1(\text{mod}10)$

Donc pour tout entier naturel k, $3^{4k}\equiv 1(\text{mod}10)$.

Comme $28 = 7\times 4$ alors $3^{28}\equiv 1(\text{mod}10)$.

Exercice 2 :

1.a) $y^2-4x+4=0\Leftrightarrow y^2=4(x+1)$.

On pose $\begin{cases} X=x-1\\ Y=y\end{cases}$, l'ensemble Γ serait d'équation $Y^2=4X$ dans le repère $(\Omega,\vec{i},\vec{j})$.

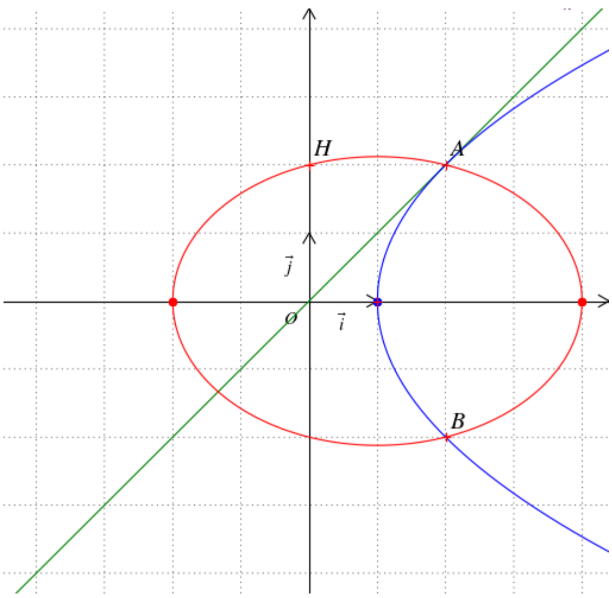
Γ est donc une parabole de paramètre 2 et de sommet $\Omega(1,0)$.

	Dans $(\Omega,\vec{i},\vec{j})$	Dans $(O,\vec{i},\vec{j})$
Foyer	F(1, 0)	F(2, 0)
Directrice	D : X = -1	D : x = 0

b) $\begin{cases} y_A\ge 0\\ A(2,y_A)\in\Gamma\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} y_A\ge 0\\ {y_A}^2=4\end{cases}\Leftrightarrow y_A=2$ donc A(2, 2)

	Dans $(\Omega,\vec{i},\vec{j})$	Dans $(O,\vec{i},\vec{j})$
Le point A	A(1, 2)	A(2, 2)
La tangente (T)	T : 2Y=2(X+1) $\Leftrightarrow T:Y=X+1$	T : y = x

c)



2. a) Γ' est une conique d'excentricité $e=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, 0 <e < 1 donc Γ' est une ellipse .

M(x, y) $\in \Gamma' \Leftrightarrow F'M=\dfrac{1}{\sqrt{2}}d(M,\Delta) \Leftrightarrow F'M^2=\dfrac{1}{2}\left(d(M,\Delta)\right)^2$

$$\Leftrightarrow \left(x-1-\frac{3}{\sqrt{2}}\right)^2+y^2=\frac{1}{2}\left(x-1-3\sqrt{2}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2-\frac{6}{\sqrt{2}}(x-1)+\frac{9}{2}+y^2=\frac{1}{2}\left[(x-1)^2-6\sqrt{2}(x-1)+18\right]$$

$$\Leftrightarrow 2(x-1)^2-6\sqrt{2}(x-1)+9+2y^2=(x-1)^2-6\sqrt{2}(x-1)+18$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2+2y^2=9$$

Donc une équation de Γ' est $(x-1)^2+2y^2=9$.

b) $\begin{cases} y^2=4(x-1) \\ (x-1)^2+2y^2=9 \end{cases}$ donc $\begin{cases} x\geq 1 \\ y^2=4(x-1) \\ (x-1)^2+8(x-1)-9=0 \end{cases}$.

On pose t =x -1 , $t\geq 0$, on obtient : $t^2+8t-9=0$.

Les solutions de l'équation $t^2+8t-9=0$, sont 1 et -9, d'où x = 2 ou x = -8 (à rejeter)

Ainsi , x = 2.

Il en résulte : $y^2=4(x-1)=4$ et par suite y = 2 ou y = -2.

Donc Γ et Γ' se coupent aux points A(2, 2) et B(2, -2).

c) H est le projeté orthogonal de A sur $(O,\vec{j})$ donc H(0, 2).

Comme (0 – 1)² +2. 2= 1 + 8= 9 alors H appartient à Γ'.

Les sommets principaux de Γ' sont les points de coordonnées (4, 0) et (-2, 0).

Les sommets secondaires de Γ' sont les points de coordonnées $\left(0,\frac{3}{\sqrt{2}}\right)$ et $\left(0,-\frac{3}{\sqrt{2}}\right)$.

4. Le volume engendré par rotation autour de l'axe des abscisses de l'arc ΩA de Γ est :

$$V_1=\pi\int_1^2 4(x-1)\,dx=2\pi\left[(x-1)^2\right]_1^2=2\pi.$$

Le volume engendré par rotation autour de l'axe des abscisses de l'arc HA de Γ' est :

$$V_2=\pi\int_0^2 \frac{1}{2}\left(9-(x-1)^2\right)dx=\frac{\pi}{2}\left[9x-\frac{1}{3}(x-1)^3\right]_0^2=\frac{52\pi}{3}.$$

Donc Le volume engendré par rotation autour de l'axe des abscisses de la réunion des arcs ΩA et HA est : V = $V_2 - V_1$ = $\frac{52\pi}{3}-2\pi=\frac{46\pi}{3}$.

Exercice 3 :

1. S est la similitude directe qui envoie D sur A et J sur B.

a) $\frac{AB}{DJ}=\frac{AB}{KJ}=\frac{BC}{\frac{1}{2}BC}=2$ donc le rapport de S est 2.

$(\overrightarrow{DJ},\overrightarrow{AB})\equiv(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{AB})[2\pi]\equiv(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA})[2\pi]\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]$ donc l'angle de S est $\frac{\pi}{3}$.

b) On a : CB = CA = 2 CJ et $(\overrightarrow{CJ},\overrightarrow{CB})\equiv(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB})[2\pi]\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]$

Et CA= 2AJ = 2AK = 2CD et $(\overrightarrow{CD},\overrightarrow{CA})\equiv(\overrightarrow{AK},\overrightarrow{AJ})[2\pi]\equiv(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})[2\pi]\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]$.

Comme S(D) = A et S(J) =B alors C est le centre de S.

2. g est similitude indirecte qui transforme D en C et C en B.

a) $\frac{CB}{DC}=\frac{BC}{\frac{1}{2}BC}=2$ donc le rapport de g est 2.

b) $g\circ g(D)=g(C)=B$

G est une similitude indirecte de centre Ω et de rapport 2 donc $g\circ g$ est l'homothétie de centre Ω et de rapport 4.

c) Dans le triangle ABJ :

(KE) // (AF) , K milieu de [AB] et E $\in$[BF] donc E est milieu de [BF] d'où $\overrightarrow{FE}=\overrightarrow{EB}$.

Dans le triangle DKE :

(JF) // (KE) , J milieu de [KD] et f $\in$ [ED] donc J est milieu de [DK] d'où $\overrightarrow{DF}=\overrightarrow{FE}$.

Ainsi : $\overrightarrow{DF}=\overrightarrow{FE}=\overrightarrow{EB}$. Il en résulte : $\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{DF}+\overrightarrow{FE}+\overrightarrow{EB}=3\overrightarrow{DF}$.

H= $S_D(F) \Leftrightarrow$ D milieu de [FH] $\Leftrightarrow \overrightarrow{HD}=\overrightarrow{DF}$.

Donc $\overrightarrow{HB}=\overrightarrow{HD}+\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{HD}+3\overrightarrow{HD}=4\overrightarrow{HD}$.

d) $g\circ g(D)=B \Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega B}=4\overrightarrow{\Omega D}$ or $\overrightarrow{HB}=4\overrightarrow{HD}$ donc $\Omega=H$.

e) Soit Δ l'axe de g , $g=S_\Delta\circ h_{(H,2)} \Leftrightarrow S_\Delta=g\circ h_{\left(H,\frac{1}{2}\right)}$

$S_\Delta(F)=g\circ h_{\left(H,\frac{1}{2}\right)}(F)=f(D)=C$ donc Δ est la médiatrice de [FC].

3. On pose $f=g\circ S^{-1}$.

a) $f(A)=g\circ S^{-1}(A)=g(D)=C$ et $f(C)=g\circ S^{-1}(C)=g(C)=B$.

b) f est la composée d'une similitude directe de rapport 2 et d'une similitude indirecte de rapport $\dfrac{1}{2}$ donc f est une similitude indirecte de rapport 1 d'où f est un antidéplacement.

Comme $f\circ f(A)=f(C)=B\neq A$ alors f n'est pas une symétrie orthogonale d'où f est une symétrie glissante.

Soit Δ' l'axe de f et $\vec{u}$ son vecteur ,

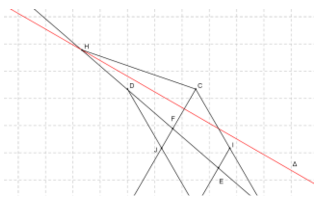
$f\circ f=t_{2\vec{u}}$ et $f\circ f(A)=B$ donc $2\vec{u}=\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \vec{u}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

Comme J milieu de [AC] et I milieu de [BC] alors $\vec{u}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{JI}$.

f(A) = C et J milieu de [AC] donc J appartient à Δ'

f(C) = B et I milieu de [BC] donc I appartient à Δ'

Comme I $\neq$ J alors Δ' = (IJ)



Exercice 4 :

A-1. g est dérivable sur $]0,+\infty[$ et on pour tout x > 0, $g'(x)=4x+\frac{1}{x}>0$ donc g est strictement croissante sur $]0,+\infty[$.

2. g(1)= $2\times1^2-2+\ln 1=0$.

Si 0 < x <1 alors g(x) < g(1) donc g(x) < 0

Si x > 1 alors g(x) > g(1) donc g(x) > 0.

D'où

x	0	1	$+\infty$
g(x)	‖ -	0	+

B-1.a- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} 2x+\frac{1-\ln x}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty} 2x+\frac{1}{x}-\frac{\ln x}{x}=+\infty$.

$\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to0^+} 2x+\frac{1-\ln x}{x}=+\infty$ donc la droite des ordonnées est asymptote à (C).

b- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-2x=\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x}-\frac{\ln x}{x}=0$ donc la droite D : y=2x est asymptote à (C) au voisinage de $+\infty$.

Pour tout x >0 , $f(x)-2x=\frac{1-\ln x}{x}$.

x	0	e	$+\infty$
1-lnx	‖ +	0	-
f(x) – 2x	‖ +	0	-
Position de (C) par rapport à (D)	‖ au dessus		au dessous

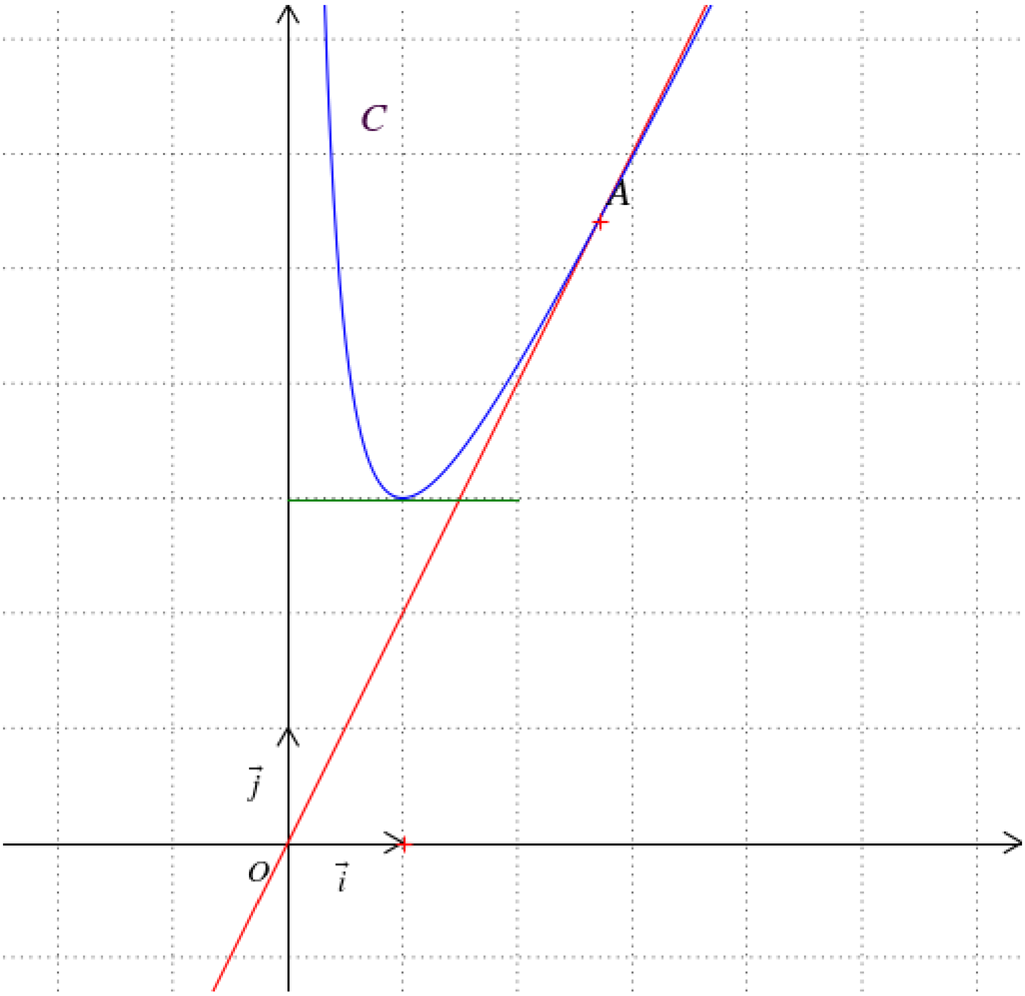
$C\cap D=\{A(e,2e)\}$.

2.a- Pour tout x > 0, $f'(x)=2+\frac{-\frac{1}{x}.x-(1-\ln x)}{x^2}=2+\frac{-2+\ln x}{x^2}=\frac{2x^2-2+\ln x}{x^2}=\frac{g(x)}{x^2}$.

b-

x	0	1	$+\infty$
f'(x)	‖ -	0	+
f(x)	‖ $+\infty$ ↘	3	↗ $+\infty$

3.



4.a- Pour tout entier naturel n ,

$$U_n = \int_{e^n}^{e^{n+1}} \left(f(x) - 2x\right)dx = \int_{e^n}^{e^{n+1}} \left(\frac{1}{x} - \frac{\ln x}{x}\right)dx = \left[\ln x - \frac{1}{2}(\ln x)^2\right]_{e^n}^{e^{n+1}}$$

$$= (n+1) - \frac{1}{2}(n+1)^2 - \left(n - \frac{1}{2}n^2\right) = -n + \frac{1}{2}.$$

D'où $U_{n+1} - U_n = -1$ donc (U_n) est une suite arithmétique de raison -1.

b- $A = \int_1^{e^2} |f(x) - 2x|dx = \int_1^{e} |f(x) - 2x|dx + \int_e^{e^2} |f(x) - 2x|dx$

$$= \int_1^{e} (f(x) - 2x)dx + \int_e^{e^2} -(f(x) - 2x)dx = U_0 - U_1$$

C-1. On a : h n'est pas définie à droite en 0 et $\lim\limits_{x\to 0^+} h(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} x^2(1-\ln x)-3x+2 = \lim\limits_{x\to 0^+} x^2 - x\ln x - 3x + 2 = 2$

donc h est prolongeable par continuité à droite en 0.

2. Pour tout x > 0, $\dfrac{h(x)}{x} = x(1-\ln x)-3+\dfrac{2}{x} = 2\left(\dfrac{1}{x}\right)+\dfrac{1-\ln x}{\frac{1}{x}}-3 = f\left(\dfrac{1}{x}\right)-3$.

3. Pour tout x > 0 , $h(x)=0 \Leftrightarrow f\left(\dfrac{1}{x}\right)=2 \Leftrightarrow \dfrac{1}{x}=1 \Leftrightarrow x=1$.