EXAMEN DU BACCALAUREAT	Epreuve : MATHEMATIQUES
SESSION DE JUIN 2013	Durée :3H ****** Coefficient : 3
Section : Sciences Expérimentales	SESSION PRINCIPALE
Corrigé proposé par : FARID ABIDI ****** Lycée Ibn Khladoun à RADES	

Exercice 1 :

1. Faux

En effet,

On a : $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AC}\wedge\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}$

Comme $\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$, alors $\overrightarrow{AC}\wedge\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{AC}$.

2. Vrai

En effet ,

$\overrightarrow{IA}\wedge\overrightarrow{IG}$ est un vecteur normal au plan (AIG) et J est un point de ce plan donc $\overrightarrow{IA}\wedge\overrightarrow{IG}$ est orthogonal au vecteur $\overrightarrow{IJ}$. Par suite : $\left(\overrightarrow{IA}\wedge\overrightarrow{IG}\right).\overrightarrow{IJ}=0$.

Remarque :

on a $I\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0\right)$, $J\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1\right)$, $\overrightarrow{IA}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\0\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{IG}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$.

D'où $\overrightarrow{IA}\wedge\overrightarrow{IG}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\0\end{pmatrix}$, et par suite $\left(\overrightarrow{IA}\wedge\overrightarrow{IG}\right).\overrightarrow{IJ}=0$

3. Faux

En effet ,

(S) est la sphère de centre $I\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0\right)$ et de rayon R = $\frac{AC}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

La distance du point I au plan P : z- 1 = 0 est d(I, P)= $\frac{|-1|}{\sqrt{1}}=1\neq R$ donc (S) n'est pas tangente à (P).

Exercice 2 :

I- Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^3+6x+2$

1) la fonction f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout x réel , $f'(x)=3x^2+6>0$ donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

D'où $f(\mathbb{R}) = \left]\lim_{x\to-\infty} f(x), \lim_{x\to+\infty} f(x)\right[= \left]\lim_{x\to-\infty} x^3, \lim_{x\to+\infty} x^3\right[=]-\infty,+\infty[= \mathbb{R}$.

Or $0 \in \mathbb{R}$, donc l'équation f(x) = 0 admet dans $\mathbb{R}$ une unique solution α.

2) D'après le graphique, on remarque que : $f(-1) < 0$ et comme $f(0) = 2$ alors $-1 < \alpha < 0$.

Comme $f(-0,5) = -1,125$ et $f(0) = 2$ alors $-0,5 < \alpha < 0$.

Comme $f(-0,25) \approx 0,48$ et $f(-0,5) = -1,125$ alors $-0,5 < \alpha < -0,25$

Comme $f(-0,375) \approx -0,30$ et $f(-0,25) \approx 0,48$ alors $-0,375 < \alpha < -0.25$

Comme $f(-0,3) \approx 0,17$ et $f(-0,375) \approx -0,30$ alors $-0,375 < \alpha < -0.3$.

D'où $-0,4 < \alpha < -0,3$.

Remarque :

x	-0,5	-0,4	-0,3	-0,2	-0,1	0
f(x)	-1,125	-0,464	0,173	0,792	1,399	2

D'où $-0,4 < \alpha < -0,3$.

II- 1) a) Remarquons que l'équation $(E_1): z^3 = 2$ admet trois solutions.

$$a_1^3 = \left(\sqrt[3]{2}\right)^3 = 2 \ , \ a_2^3 = \left(\sqrt[3]{2}e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)^3 = 2e^{i2\pi} = 2 \quad \text{et} \quad a_3^3 = \left(\sqrt[3]{2}e^{-i\frac{2\pi}{3}}\right)^3 = 2e^{-i2\pi} = 2$$

donc a_1, a_2 et a_3 sont les solutions de l'équation (E_1).

b) De même, l'équation $(E_2): z^3 = -4$ admet trois solutions.

$$b_1^3 = \left(-\sqrt[3]{4}\right)^3 = -4 \ , \ b_2^3 = \left(\sqrt[3]{4}e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^3 = 4e^{i\pi} = -4 \quad \text{et} \quad b_3^3 = \left(\sqrt[3]{4}e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)^3 = 4e^{-i\pi} = -4$$

donc b_1, b_2 et b_3 sont les solutions de l'équation (E_1).

c) $a_1 \times b_1 = \sqrt[3]{2} \times \left(-\sqrt[3]{4}\right) = -\sqrt[3]{8} = -2$, $a_2 \times b_2 = \sqrt[3]{2}e^{i\frac{2\pi}{3}} \times \sqrt[3]{4}e^{i\frac{\pi}{3}} = \sqrt[3]{8}e^{i\pi} = -2$

et $a_3 \times b_3 = \sqrt[3]{2}e^{-i\frac{2\pi}{3}} \times \sqrt[3]{4}e^{-i\frac{\pi}{3}} = \sqrt[3]{8}e^{-i\pi} = -2$.

2) a) $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = \left(a^3+b^3\right) + 3ab(a+b) = -2 - 6(a+b)$

b) $(a+b)^3 = -2 - 6(a+b) \Leftrightarrow (a+b)^3 + 6(a+b) + 2 = 0$ donc $(a+b)$ est une solution de l'équation $z^3 + 6z + 2 = 0$.

3) On a : $a_1^3 + b_1^3 = -2$ et $a_1 \times b_1 = -2$ donc $(a_1 + b_1)$ est une solution de $z^3 + 6z + 2 = 0$.

De même : $a_2^3 + b_2^3 = -2$ et $a_2 \times b_2 = -2$ donc $(a_2 + b_2)$ est une solution de $z^3 + 6z + 2 = 0$.

De même : $a_3^3 + b_3^3 = -2$ et $a_3 \times b_3 = -2$ donc $(a_3 + b_3)$ est une solution de $z^3 + 6z + 2 = 0$.

4) $a_1 + b_1 = \sqrt[3]{2} + \left(-\sqrt[3]{4}\right)$ est la solution réelle de $(E): x^3 + 6x + 2 = 0$ donc $\alpha = \sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{4}$.

Exercice 3 :

1) Le nombre de mouches au bout de 85 jours est 1034.

2) a) Une valeur approchée à 10^{-3} près du coefficient de corrélation linéaire entre T et M est r = -0,997.

   b) Une équation de la droite de régression de M en T est M = -0,155.T + 4,036 .

3) a) $\ln\left(\frac{1035}{N}-1\right)=M \Leftrightarrow \frac{1035}{N}-1=e^{M} \Leftrightarrow \frac{1035}{N}=1+e^{M} \Leftrightarrow \frac{N}{1035}=\frac{1}{1+e^{M}} \Leftrightarrow N=\frac{1035}{1+e^{M}}$.

b) $N=\frac{1035}{1+e^{M}}=\frac{1035}{1+e^{-0,155.T+4,036}}=\frac{1035}{1+e^{4,036}e^{-0,155.T}}=\frac{1035}{1+56,589.e^{-0,155.T}}$.

4) Soit f la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par $f(x)=\frac{1035}{1+56,589.e^{-0,155.x}}$.

f est dérivable sur $[0,+\infty[$ et pour tout x réel positif , $f'(x)=\frac{-1035\left(-0,155.56,589.e^{-0,155.x}\right)}{\left(1+56,589.e^{-0,155.x}\right)^{2}}>0$ donc f est strictement croissante sur $[0,+\infty[$.

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1035}{1+56,589.e^{-0,155.x}}=1035$ donc la conjecture est vérifiée.

Exercice 4 :

1) Voir figure ci-dessous.

2) a) $f(5)=\ln\left(5+\sqrt{25-9}\right)=\ln(5+4)=\ln 9=\ln\left(3^{2}\right)=2\ln 3$.

   b) Voir figure ci-dessous.

   c) On a : MP = 5 – 3 = 2 et NP = $2\ln 3-\ln 3=\ln 3$.

   D'où l'aire du rectangle MPNQ est MP . NP = $2\ln 3$ .ua et l'aire du triangle du triangle MPN est $\frac{1}{2}MP\times NP=\ln 3$ ua .

   d) L'aire A est comprise en l'aire du triangle MNPO et celle du rectangle MPNQ donc $\ln 3\le A\le 2\ln 3$.

3) a) $\lim_{x\to+\infty} x+\sqrt{x^{2}-9}=+\infty$ donc $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

   b) f est continue et strictement croissante sur $[3,+\infty[$ donc f réalise une bijection de $[3,+\infty[$ sur $f\left([3,+\infty[\right)=\left[f(3),\lim_{x\to+\infty} f(x)\right[=[\ln 3,+\infty[$.

4) la courbe C_g est le symétrique de la courbe C_f par rapport la droite $\Delta: y=x$. Voir figure

5) a) Voir figure.

   b) A' , l'aire de de E', est égal à l'aire du rectangle ABCD moins l'aire de la partie du plan limitée par la courbe C_g, l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives x = ln3 et x = 2 ln3.

AB = ln3 et AD = 5 donc $A' = 5\ln 3 - \int_{\ln 3}^{2\ln 3} g(x)dx$.

Remarque :

$$A' = \int_{\ln 3}^{2\ln 3} (5 - g(x))dx = \int_{\ln 3}^{2\ln 3} 5dx - \int_{\ln 3}^{2\ln 3} g(x)dx$$

$$= 5(2\ln 3 - \ln 3) - \int_{\ln 3}^{2\ln 3} g(x)dx = 5\ln - \int_{\ln 3}^{2\ln 3} g(x)dx$$

6) a) $\begin{cases} x \in [3, +\infty[\\ f(x) = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \in [\ln 3, +\infty[\\ g(y) = x \end{cases}$

$$f\left(x + \sqrt{x^2 - 9}\right) = y \Leftrightarrow x + \sqrt{x^2 + 9} = e^y \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 9} = e^y - x \Leftrightarrow x^2 + 9 = \left(e^y - x\right)^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 9 = e^{2y} - 2xe^y + x^2 \Leftrightarrow e^{2y} - 2xe^y = 9 \Leftrightarrow 2xe^y = 9 + e^y \Leftrightarrow x = \frac{9 + e^{2y}}{2e^y}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{9e^{-y} + e^y}{2}$$

Ainsi, pour tout x de $[\ln 3, +\infty[$, $g(x) = \frac{e^x + 9e^{-x}}{2}$.

b) $\int_{\ln 3}^{2\ln 3} g(x)dx = \int_{\ln 3}^{2\ln 3} \frac{e^x + 9e^{-x}}{2}dx = \frac{1}{2}\left[e^x - 9e^{-x}\right]_{\ln 3}^{2\ln 3} = \frac{1}{2}\left(e^{2\ln 3} - 9e^{-2\ln 3} - e^{\ln 3} + 9e^{-\ln 3}\right)$

$$= \frac{1}{2}\left(e^{\ln 9} - 9e^{\ln\frac{1}{9}} - e^{\ln 3} + 9e^{\ln\frac{1}{3}}\right) = \frac{1}{2}\left(9 - 9\times\frac{1}{9} - 3 + 9\times\frac{1}{3}\right) = 4$$

Donc $A' = 5\ln 3 - \int_{\ln 3}^{2\ln 3} g(x)dx = 5\ln 3 - 4$.

Figure de l'exercice 4