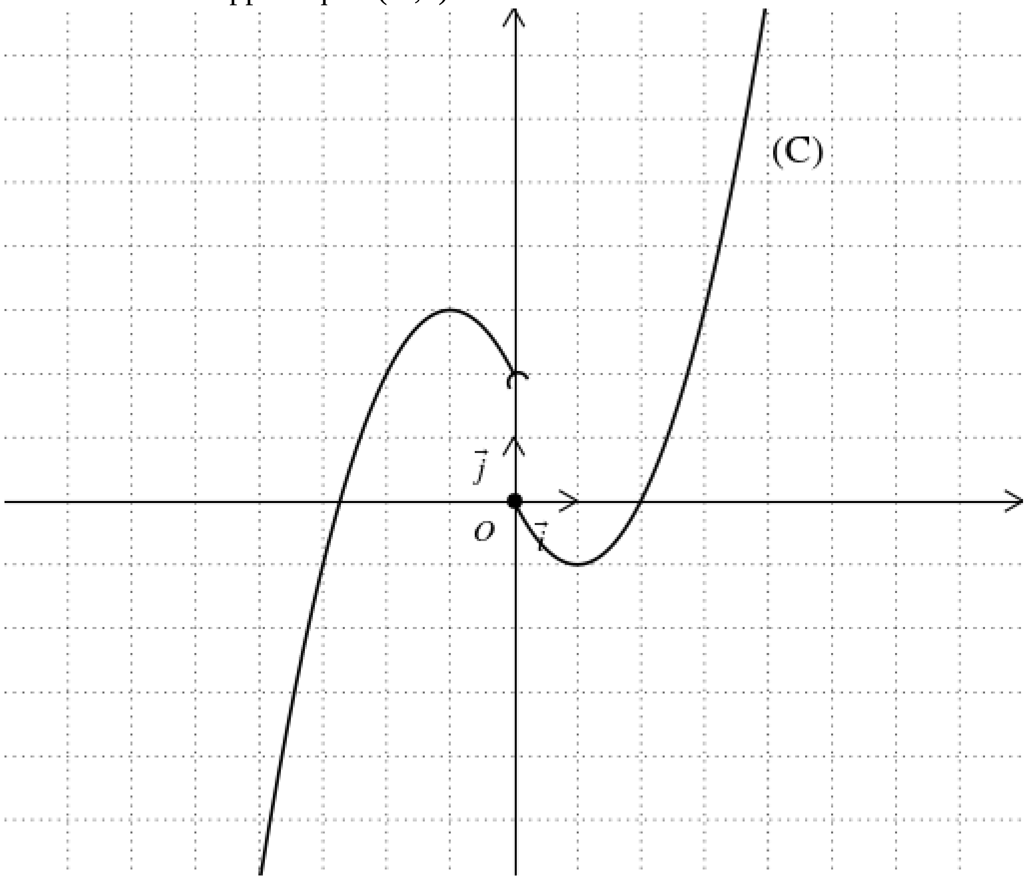
Exercice 1: (6 points)

Répondre par Vrai ou Faux à chacune des questions ci-dessous. La justification est demandée.

Le plan est muni d'un repère orthonormé.

1. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ dont la représentation graphique (C) est donnée ci-dessous. On suppose que f(-2,7) = 0 .



a) L'ensemble de définition de $\sqrt{f}$ est $[-2,7;0[\cup[2,+\infty[$.

b) -1 est le minimum de f sur l'intervalle $[-2,7;+\infty[$.

c) La fonction g définie par : $\begin{cases} g(x) = f(x) - 2 \text{, si } x < 0 \\ g(x) = f(x) \text{ , si } x \geq 0 \end{cases}$ est impaire.

2. On donne A(-3, 0) , B(0, 6) et C(4, 4). On nomme I le milieu du segment [AC].

a) $\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IC} = 65$.

b) Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux.

c) L'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC} = 0$ est le cercle circonscrit au triangle ABC.

Exercice 2: (7 points)

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\dfrac{3x}{x^2+1}$.

1. Etudier la parité de f.
2. a) Montrer que pour tout x réel, $f(x)-f(0)=\dfrac{-3\left(x^2-2x+1\right)}{2\left(x^2+1\right)}$.

   b) En déduire que f admet un maximum que l'on précisera.

   c) f est-elle bornée sur $\mathbb{R}$?
3. Soit g la restriction de f à l'intervalle I = $[1,+\infty[$.

   a) Soit a et b deux réels de I, montrer que $g(a)-g(b)=\dfrac{3(b-a)(ab-1)}{\left(a^2+1\right)\left(b^2+1\right)}$.

   b) Etudier le sens de variation de g sur I.
4. Le plan est muni d'un repère orthonormé. On a tracé, en annexe ci-joint à la page 3/3, la courbe représentative de g et celle de la restriction de f à l'intervalle $[-1,0]$.

   a) Compléter la figure pour obtenir la courbe représentative de la fonction f.

   b) Tracer alors la représentation graphique de la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x)=\dfrac{3|x|}{x^2+1}$.

Exercice 3: (7 points)

ABC est un triangle tel que AB = 4 , AC = 5 et $\widehat{BAC}=60^\circ$. On désigne par H le projeté orthogonal de C sur (AB).

1. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$. En déduire la distance AH.
2. En utilisant la relation de Chasles , calculer le produit scalaire $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}$.
3. On désigne par (E) l'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{CB}=15$.
   a) Donner un point de (E).
   b) Déterminer et construire, sur l'annexe à la page 3/3, l'ensemble (E).
4. On note G le barycentre des points pondérés (A, 1) et (B, 3) et on désigne par (F) l'ensemble des points M du plan tels que $MA^2+3MB^2=16$.
   a) Vérifier que A appartient à (F).
   b) Calculer les distances AG et BG.

   c) Montrer que pour tout point M du plan, $MA^2+3MB^2=4MG^2+12$.

   d) Déterminer et construire, sur l'annexe à la page 3/3, l'ensemble (F).

Annexe à compléter et à rendre avec la copie

Nom de l'élève : ………………………………………………

Figure de l'exercice n° 2

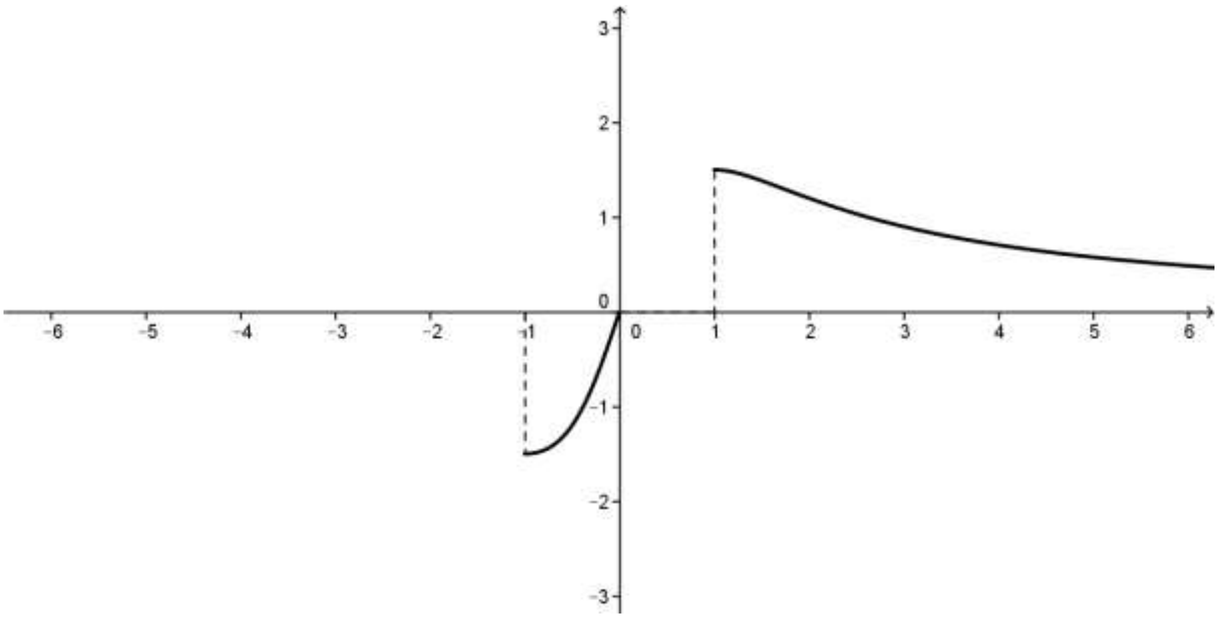
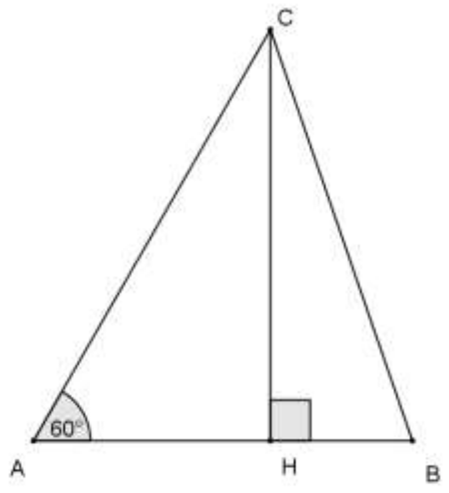


Figure de l'exercice n° 3 :



Page 3 / 3

Corrigé

Exercice 1 :

1. a) Faux .

(C) est au dessus de l'axe des abscisses sur l'intervalle $\left[-2,7;0\right[$ et sur $\left]2,+\infty\right[$.

(C) coupe l'axe des abscisses aux points d'abscisses respectives (-2,7) , 0 et 2.

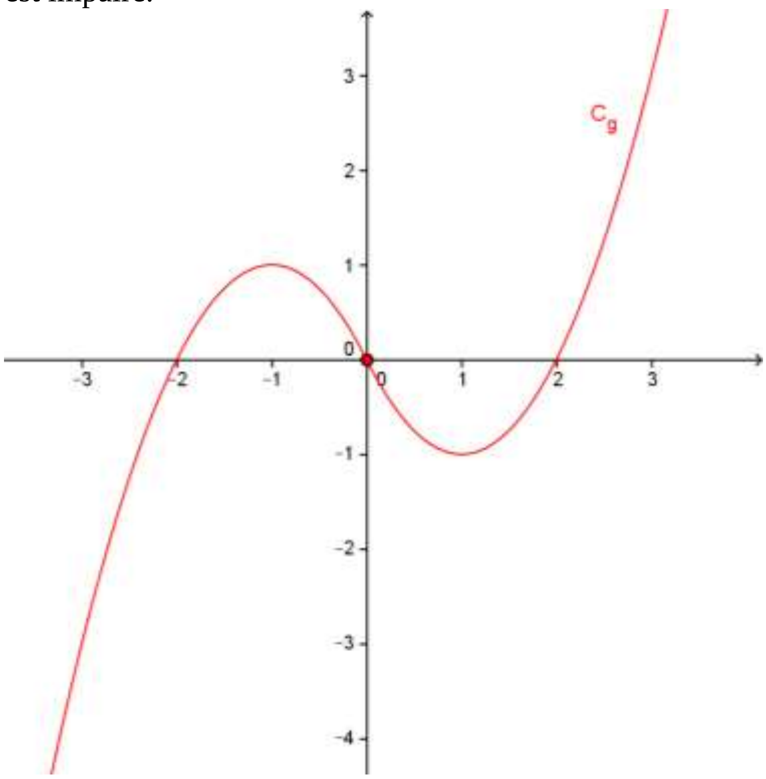
Donc $D_f = \left[-2,7;0\right] \cup \left[0,+\infty\right[$.

b) Vrai

Pour tout x de $\left[-2,7;+\infty\right[$, $f(x) \geq f(1)$ et f(1) = -1.

c) Vrai

La courbe représentative de g est symétrique par rapport à l'origine du repère donc g est impaire.



2. a) Faux.

I milieu de [AC] donc $\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IB} = -IA^2 < 0$.

b) Faux

On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3\\6\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}7\\4\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 21 + 24 = 45 \neq 0$

c) Faux

L'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC} = 0$ est le cercle $\mathscr{C}$ de diamètre [BC].

Le triangle ABC n'est pas rectangle en A donc A n'appartient pas à $\mathscr{C}$.

Exercice 2 :

1. Pour tout x réel , $f(-x) = \dfrac{3.(-x)}{(-x)^2 + 1} = -\dfrac{3x}{x^2+1} = -f(x)$ donc f est impaire.

2. a) Pour tout x réel,

$$f(x)-f(1)=\frac{3x}{x^2+1}-\frac{3}{2}=\frac{6x-3\left(x^2+1\right)}{x^2+1}=\frac{-3\left(x^2-2x+1\right)}{x^2+1}=-\frac{3(x-1)^2}{x^2+1}\leq 0$$

b) Pour tout x réel , $f(x)-f(1)=\frac{-3\left(x^2-2x+1\right)}{x^2+1}=-\frac{3(x-1)^2}{x^2+1}\leq 0$ donc f admet un maximum en 1 qui vaut $f(1)=\frac{3}{2}$.

c) Comme pour tout x réel , $f(x)\leq\frac{3}{2}$ et f est impaire alors $-\frac{3}{2}\leq f(x)\leq\frac{3}{2}$.

3. a) $g(a)-g(b)=\frac{3a}{a^2+1}-\frac{3b}{b^2+1}=\frac{3a\left(b^2+1\right)-3b\left(a^2+1\right)}{\left(a^2+1\right)\left(b^2+1\right)}=\frac{3ab^2+3a-3a^2b-3b}{\left(a^2+1\right)\left(b^2+1\right)}$

$$=\frac{3ab(b-a)+3(a-b)}{\left(a^2+1\right)\left(b^2+1\right)}=\frac{3(b-a)(ab-1)}{\left(a^2+1\right)\left(b^2+1\right)}$$

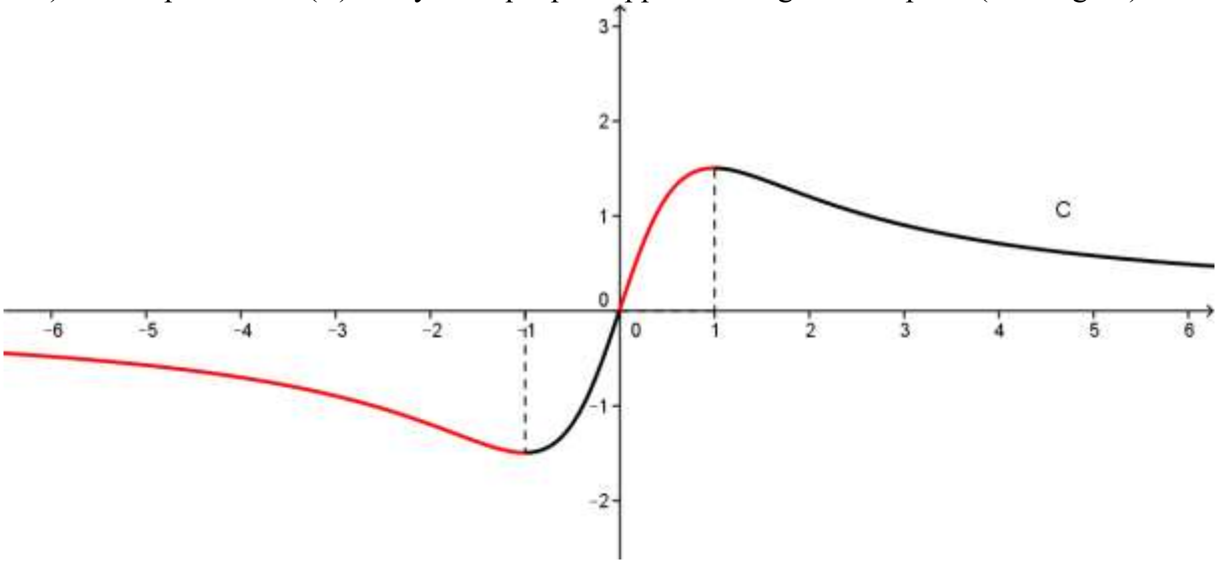
b) Supposons que $a < b$ donc $b - a > 0$.

D'autre part , $a\in I$ et $b\in I$ donc $a\geq 1$ et $b\geq 1$ donc $ab\geq 1$ donc $ab-1\geq 0$.

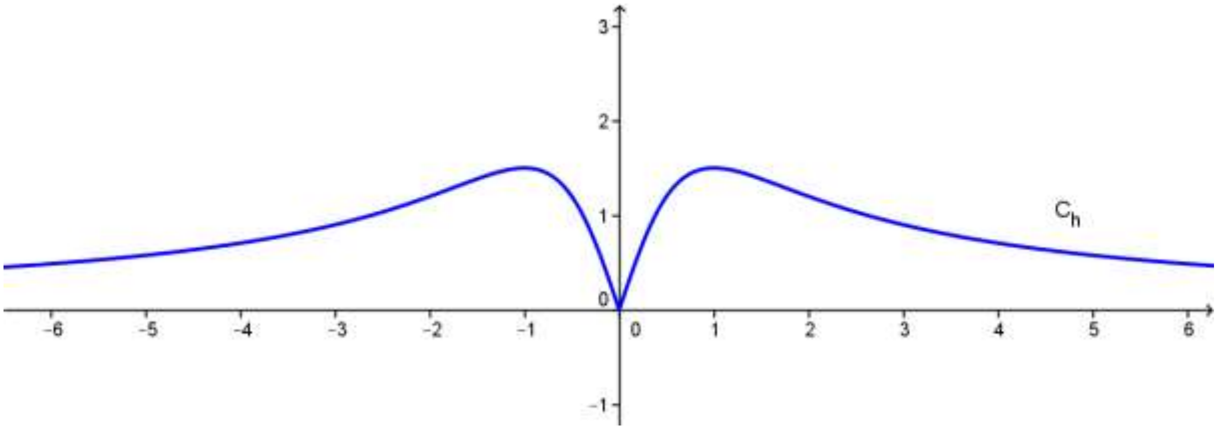
Comme $\frac{3}{\left(a^2+1\right)\left(b^2+1\right)}>0$ alors g(a) - g(b) $\geqslant$ 0 d'où g(a) $\geqslant$ g(b).

Ainsi , g est strictement décroissante sur I.

4. a) f est impaire donc (C) est symétrique par rapport à l'origine du repère. (Voit figure).



b) Pour tout x réel, $h(x)=\frac{3|x|}{x^2+1}=\left|\frac{3x}{x^2+1}\right|=|f(x)|$.



Exercice 3 :

1. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB.AC.\cos\left(\widehat{BAC}\right) = 10$.

H est le projeté orthogonal de C sur (AB) et $\widehat{BAC} < 90^\circ$ donc $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB.AH$

Par suite : $AH = \dfrac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{AB} = \dfrac{10}{4} = \dfrac{5}{2}$.

2. $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CA}.\left(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}\right) = CA^2 + \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{AB} = CA^2 - \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 25 - 10 = 15.$

3. a) $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB} = 15$ donc $C \in (E)$.

b) $M \in (E) \Leftrightarrow \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{CB} = 15 \Leftrightarrow \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB} \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{CA}\right).\overrightarrow{CB} = 0$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{CB} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MC} \perp \overrightarrow{CB}$

Donc (E) est la perpendiculaire à la droite (BC) passant par C.

4. a) $AA^2 + 3AB^2 = 3AB^2 = 48$ donc $A \in (F)$.

b) G barycentre de (A, 1) et (B, 3) $\Leftrightarrow \overrightarrow{AG} = \dfrac{3}{4}\overrightarrow{AB}$ donc $G \in [AB]$ et $AG = \dfrac{3}{4}AB = 3$

D'où BG = AB – AG = 1.

c) Pour tout point M du plan ,

$$MA^2 + 3MB^2 = \left\|\overrightarrow{MA}\right\|^2 + 3\left\|\overrightarrow{MB}\right\|^2 = \left\|\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA}\right\|^2 + 3\left\|\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB}\right\|^2$$

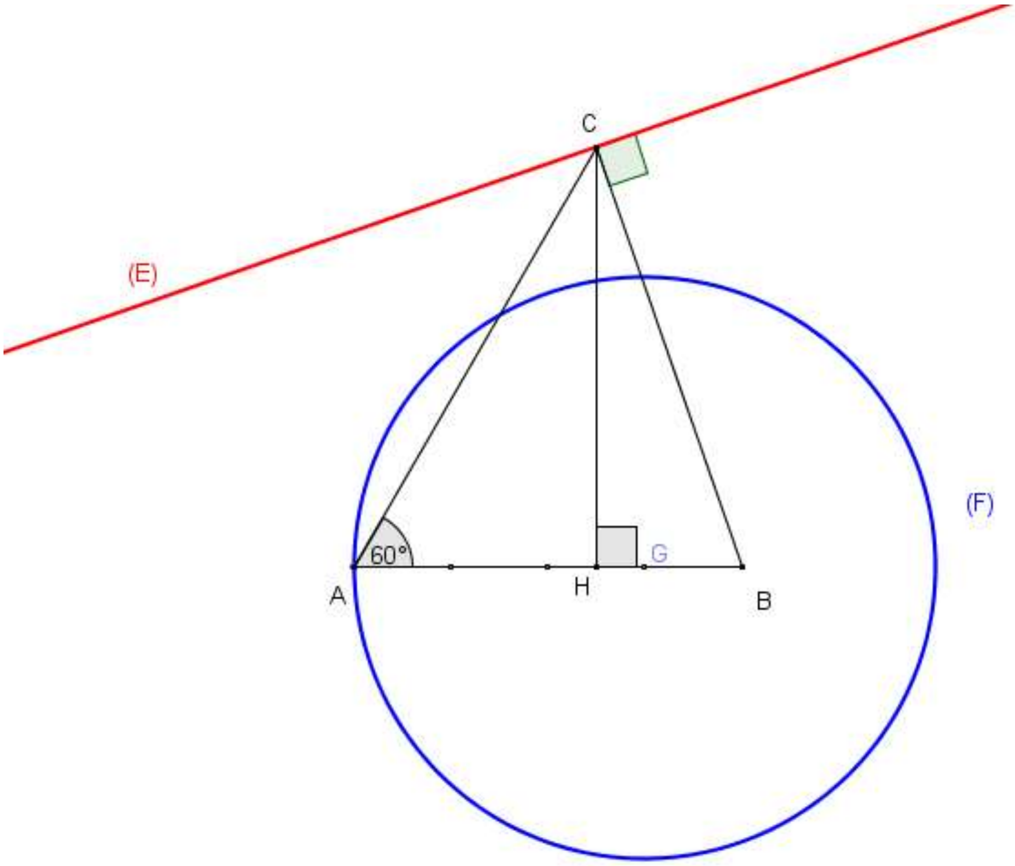
$$= MG^2 + GA^2 + 2\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{GA} + 3MG^2 + 3GB^2 + 6\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{GB}$$

$$= 4MG^2 + GA^2 + 3GB^2 + 2\overrightarrow{MG}\left(\overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{GB}\right)$$

$$= 4MG^2 + 12$$

d) $M \in (F) \Leftrightarrow MA^2 + 3MB^2 = 48 \Leftrightarrow 4MG^2 + 12 = 48 \Leftrightarrow MG^2 = 9 \Leftrightarrow GM = 3$

Donc (F) est le cercle de centre G et de rayon 3.


C
(E)
(F)
60°
A
H
G
B