L. Ibn Khaldoun RADES	DEVOIR DE SYNTHESE 1	3 ème SE 1 Durée : 2 H
Mr ABIDI Farid	**Mathématiques**	Décembre 2013

Exercice 1: (4 points)

I- Etant donné deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ du plan.

Exprimer la norme de $(\vec{u}+\vec{v})$ en fonction des normes des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et de leur produit scalaire.

II- Répondre par Vrai ou Faux à chacune des questions suivantes. Aucune justification n'est demandée.

1. Soit f une fonction définie sur un intervalle I ouvert sauf peut être en a et $\mathscr{C}$ sa représentation graphique dans un repère du plan.

a) Si a n'appartient pas à l'ensemble de définition de f et $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\ell$, où ℓ est un réel, alors f est prolongeable par continuité en a.

b) Si $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ est infinie alors la droite d'équation y = a est une asymptote à $\mathscr{C}$.

2. $(\vec{i},\vec{j})$ est une base orthonormé de l'ensemble des vecteurs du plan.

Le produit scalaire des vecteurs $\vec{u}=a\vec{i}+b\vec{j}$ et $\vec{u'}=a'\vec{i}+b'\vec{j}$ est $\vec{u}.\vec{u'}=ab'-ba'$.

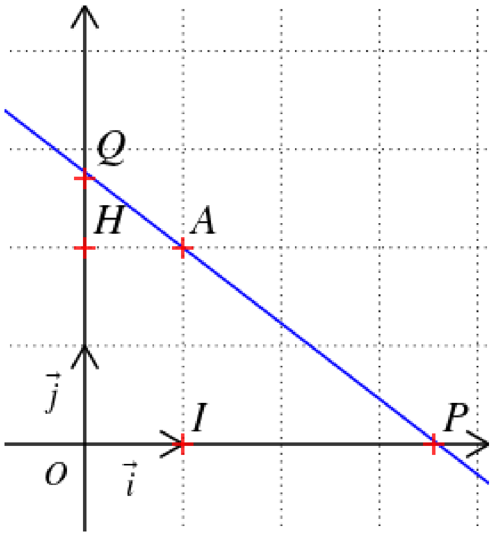
Exercice 2: (5 points)

$(O,\vec{i},\vec{j})$ est un repère orthonormé du plan. On considère les points A(1, 2) , I(1, 0) et H(0, 2). On pose pour tout réel x > 1, le point P(x , 0) , Q le point d'intersection de la droite (AP) et l'axe des ordonnées.

1. a) Calculer les distances PO et IA , et exprimer la distance IP en fonction de x.

b) Montrer que $OQ=\dfrac{2x}{x-1}$.

c) En déduire l'aire du triangle OPQ.



2. Soit f la fonction définie sur $]1,+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{x^2}{x-1}$ et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative.

a) Vérifier que pour tout réel x > 1, $f(x)=x+1+\dfrac{1}{x-1}$.

b) Déterminer les limites de f aux bornes de $]1,+\infty[$.

c) Déterminer les équations des asymptotes à $\mathscr{C}$.

3. a) Etudier le signe de $f(x)-4$ sur l'intervalle $]1,+\infty[$.

b) Pour quelle valeur de x l'aire du triangle OPQ est-elle minimale ? Quelle est cette aire ?

Exercice 3: (6 points)

ABCD est un carré de côté a, I et J sont les milieux respectifs de [AD] et [DC]. On pose $\theta = \widehat{IBJ}$.

1. a) Montrer que : $BI = BJ = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$.

b) En déduire que : $\overrightarrow{BI}.\overrightarrow{BJ} = \dfrac{5}{4}a^2\cos\theta$.

2. a) Exprimer les vecteurs $\overrightarrow{BI}$ et $\overrightarrow{BJ}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$.

b) En déduire que : $\overrightarrow{BI}.\overrightarrow{BJ} = a^2$.

c) En déduire les valeurs exactes de $\cos\theta$.

3. Soit K le milieu du segment [IJ].

a) Calculer IJ en fonction de a.

b) Déterminer et représenter l'ensemble des points du plan tels que $\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{MJ} = a^2$.

Exercice 4: (5 points)

Dans le plan orienté , ABCD est un quadrilatère inscrit dans un cercle dont les diagonales se coupent en I et vérifient $\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BD}\right) \equiv \dfrac{\pi}{2}[2\pi]$ et $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right) \equiv \dfrac{\pi}{3}[2\pi]$.

J est le milieu de [CD].Voir figure ci-contre.

L'objectif de cet exercice est de démontrer que les droites (AB) et (IJ) sont perpendiculaires.

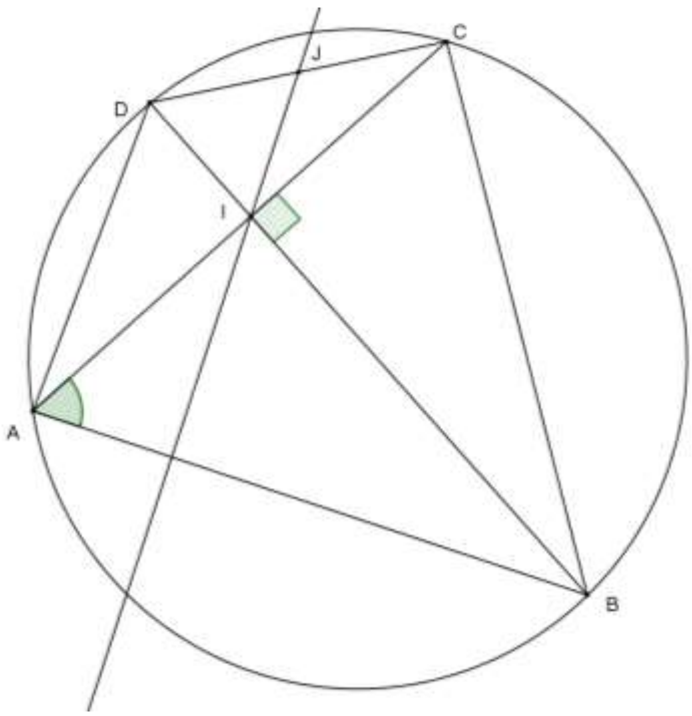
1. Reconnaitre l'ensemble Γ des points M du plan tels que $\left(\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MC}\right) \equiv \dfrac{\pi}{3}[2\pi]$.

2. Montrer que $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{IJ}\right) \equiv \dfrac{\pi}{3} + \left(\overrightarrow{IC},\overrightarrow{IJ}\right)[2\pi]$.

3. a) Déterminer la mesure principale de l'angle $\left(\overrightarrow{DI},\overrightarrow{DJ}\right)$.

b) Montrer que le triangle DIJ est isocèle en J.

c) Montrer que $\left(\overrightarrow{IC},\overrightarrow{IJ}\right) \equiv \dfrac{\pi}{2} - \left(\overrightarrow{IJ},\overrightarrow{ID}\right)[2\pi]$.



En déduire la mesure principale de l'angle $\left(\overrightarrow{IC},\overrightarrow{IJ}\right)$.

4. Conclure.