Problèmes de révision

Problème 1 :

L'objet du problème est d'étudier sur l'intervalle $]0,+\infty[$ la fonction f définie par $f(x)=x\sqrt{e^{\frac{2}{x}}-1}$.

1. Soit g la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par g(x) = $1-t-e^{-2t}$.
   a) Etudier les variations de g.
   b) Démontrer qu'il existe un unique réel a strictement positif tel que g(a) = 0 et vérifier $0,79<a<0,80$.
   c) Etudier le signe de g(t) suivant les valeurs de t.
2. a) Montrer que pour tout x > 0, $\ln\left(f(x)\right)=\frac{1}{x}(1+x\ln x)+\frac{1}{2}\ln\left(1-e^{-\frac{2}{x}}\right)$.
   b) En déduire $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$.
3. a) Montrer que pour tout de [0, 1], $0\le e^t-1\le et$.
   b) En déduire à l'aide d'une intégration que, pour tout u de [0, 1] :
   $1+u\le e^u\le 1+u+\frac{e}{2}u^2$.
   c) Utiliser cet encadrement pour démontrer que pour tout x de $[2,+\infty[$,
   $2x\le\left[f(x)\right]^2\le 2x+2e$.
   d) En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
4. a) Montrer que f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et que pour tout x > 0,
   $f'(x)=\frac{e^{\frac{2}{x}}}{\sqrt{e^{\frac{2}{x}}-1}}g\left(\frac{1}{x}\right)$.
   b) Dresser le tableau de variations de f.
   c) Tracer la coure représentative (C) de f dans un repère orthonormé.

Problème 2:

Soit f_n la fonction définie sur [-1,+∞[par $f_n(x)=\frac{e^x}{(1+x)^n}$ où $n\in\mathbb{N}^*$.

On note (C_n) sa courbe dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$; unité graphique 2cm.

A-1. a) Etudier les variations de f_1 et f_2.

b) Etudier la position relative de (C_1) et (C_2).

Problèmes de révision

Construire (C_1) et (C_2) dans le même repère.

c) Calculer , en cm², l'aire de la partie du plan limitée par (C_1) et (C_2)

et les droites d'équations : x = 0 et x = 1.

2. Soit u_n la valeur minimale de f_n sur $[-1,+\infty[$.

a) Montrer que : $u_n = f_n(n-1)$.

b) Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} \ln(u_n)$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

B- Pour tout $x > \frac{1}{e}$, on pose $F(x) = \int_0^{\ln x} f_2(t)\,dt$.

1. Justifier l'existence de F(x) pour x de $\left]\frac{1}{e},+\infty\right[$.

2. Montrer que pour tout $x > \frac{1}{e}$, on a : $F(x) \leq x\left(1-\frac{1}{\ln x+1}\right)$.

En déduire $\lim\limits_{x \to \left(\frac{1}{e}\right)^+} F(x)$.

3. a) Montrer que pour tout $x > \frac{1}{e}$, on a :

$$F(x) = \frac{x}{(\ln x + 1)^2} - 1 + 2\int_0^{\ln x} f_3(t)\,dt$$

b) En déduire que pour tout $x \geq 1$, on a : $F(x) \geq \frac{x}{(\ln x + 1)^2} - 1$.

En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$

4. Montrer que la fonction F est une bijection de $\left]\frac{1}{e},+\infty\right[$ sur IR.

C- Pour $n \geq 1$, on pose $I_n = \int_0^1 f_n(x)\,dx$.

1. Montrer que la suite (I_n) est décroissante et qu'elle est convergente.

Problèmes de révision

2. a) Montrer que pour tout n > 2, on a : $\frac{1}{n-1}\left(1-\frac{1}{2^{n-1}}\right) \le I_n \le \frac{e}{n-1}\left(1-\frac{1}{2^{n-1}}\right)$.

b) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.

3. a) Exprimer $f_n'(x)$ à l'aide de $f_n(x)$ et $f_{n+1}(x)$.

b) En déduire une relation entre I_n et I_{n+1} et montrer que : $\lim\limits_{n\to+\infty} n\, I_{n+1} = 1$

Problème 3 :

A tout entier naturel $n \ge 1$ on associe la fonction numérique f_n définie sur l'intervalle $I = [1 ; +\infty[$ par : $f_n(x) = \frac{1}{n!}\frac{(\ln x)^n}{x^2}$

On note C_n la courbe représentative de f_n dans un repère orthogonal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ du plan. (Choisir comme unités graphiques 1 cm sur (x'x) et 10 cm sur (y'y).

Partie A

1. Déterminer la limite de f_1 en $+\infty$. Etudier les variations de f_1.

2. Tracer la tangente à C_1 au point d'abscisse 1 puis tracer la courbe C_1.

3. A l'aide d'une intégration par parties, calculer, pour x élément de I :
$I_1(x) = \int_1^x f_1(t)dt$

Partie B

1° Déterminer la limite de f_n *en* $+\infty$.

2° a) Calculer $f_n'(x)$ *et vérifier que* $f_n'\left(e^{\frac{n}{2}}\right) = 0$.

Dresser le tableau de variation de f_n.

b) Vérifier que la valeur maximale de f_n sur I est : $y_n = \frac{1}{n!}\left(\frac{n}{2e}\right)^n$.

3° a) Soit $x \ge 1$ *. Etudier, suivant les valeurs de x, le signe de* $f_2(x) - f_1(x)$.

b) Déterminer la tangente à C_2 *au point d'abscisse 1.*

Préciser les positions relatives de C_1 *et* C_2. Tracer C_2 dans $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

Problèmes de révision

4° On se propose d'étudier la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. *Soit n un entier strictement positif.*

a) Calculer, pour x > 1 , $\dfrac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}$.

b) Montrer que $y_{n+1} = \dfrac{1}{2} f_n\left(e^{\frac{n+1}{2}}\right)$ et que $y_{n+1} \le \dfrac{1}{2} y_n$

c) En déduire que $y_n \le \dfrac{1}{e}\dfrac{1}{2^n}$. *Quelle est la limite de la suite* $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *?*

Partie C

A tout entier n ≥ 1 et à tout nombre réel x de I, on associe l'intégrale : $I_n(x) = \int_1^x f_n(t)dt$.

1° a) Soit k ≥ 1 un entier. Grâce à une intégration par parties démontrer la relation :

$$I_{k+1}(x) = I_k(x) - \frac{1}{(k+1)!}\frac{(\ln x)^{k+1}}{x}$$

b) En déduire que pour tout entier n ≥ 1

$$I_n(x) = 1 - \frac{1}{x} - \frac{\ln x}{x} - \frac{(\ln x)^2}{2!x} - \ldots - \frac{(\ln x)^{n-1}}{(n-1)!x} - \frac{(\ln x)^n}{n!x}.$$

2° Soit α ≥ 1 un nombre réel fixé.

a) Montrer que $0 \le I_n(\alpha) \le (\alpha - 1)\, y_n$, (y_n a été défini dans B.2° b))

b) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n(\alpha)$. (On utilisera B.4° c))

3° Pour n ≥ 1 et x ≥ 1 on pose : $W_n(x) = 1 + \dfrac{\ln x}{1!} + \dfrac{(\ln x)^2}{2!} + \ldots + \dfrac{(\ln x)^n}{n!}$

a) Exprimer $W_n(x)$ en fonction de $I_n(x)$.

b) α ≥ 1 étant un nombre réel fixé, déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} W_n(\alpha)$.

c) En déduire la limite γ de la suite $(U_n)_{n\ge 1}$ de terme général :

$U_n = 1 + \dfrac{1}{1!} + \dfrac{1}{2!} + \ldots + \dfrac{1}{n!}$.

En s'aidant de la calculatrice, donner une valeur décimale approchée de U_6 à 10^{-4} près.

Comparer cette valeur à γ .

Problèmes de révision

Corrigé

Problème 1 :

1. a) On a : $\lim\limits_{t\to+\infty} 1-t=-\infty$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{-t}=0$ donc $\lim\limits_{t\to+\infty} g(t)=\lim\limits_{t\to+\infty} 1-t-e^{-2t}=+\infty$.

g est dérivable sur $[0,+\infty[$ comme somme de deux fonctions dérivables et l'on a pour tout t de $[0,+\infty[$, $g'(t)=-1+2e^{-2t}$.

On a : $g'(t)=0 \Leftrightarrow -1+2e^{-2t}=0 \Leftrightarrow e^{-2t}=\frac{1}{2} \Leftrightarrow t=\ln\sqrt{2} \Leftrightarrow t=\frac{\ln 2}{2}$,

$g'(t)>0 \Leftrightarrow -1+2e^{-2t}>0 \Leftrightarrow e^{-2t}<\frac{1}{2} \Leftrightarrow t<\ln\sqrt{2} \Leftrightarrow t<\frac{\ln 2}{2}$,

et $g\left(\frac{\ln 2}{2}\right)=1-\frac{\ln 2}{2}-e^{-\ln 2}=\frac{1}{2}-\frac{\ln 2}{2}$.

Ainsi le tableau de variation de g est :

t	0		$\frac{\ln 2}{2}$		$+\infty$
g'(t)		+	0	-	
g(t)	0	↗	$\frac{1-\ln 2}{2}$	↘	$-\infty$

b) g est continue et strictement croissante sur $\left]0,\frac{\ln 2}{2}\right]$ et g(0) = 0 donc :

$t>0 \Rightarrow g(t)>g(0) \Rightarrow g(t)>0$.

g est continue et strictement décroissante sur $\left[\frac{\ln 2}{2},+\infty\right[$,

$g\left(\left[\frac{\ln 2}{2},+\infty\right[\right)=\left]-\infty,\frac{1-\ln 2}{2}\right]$ et $0\in\left]-\infty,\frac{1-\ln 2}{2}\right]$

Donc il existe un seul réel a > 0 tel que g(a) = 0.

$g(0,79)\simeq 0,006$ et $g(0,80)\simeq -0,001$ donc $g(0,80)<g(a)<g(0,79)$

Et comme g est strictement décroissante sur $\left[\frac{\ln 2}{2},+\infty\right[$, il en résulte que :

$0,79<a<0,80$.

d) On en déduit que :

- ✓ Pour tout t de $\left]0,\frac{\ln 2}{2}\right]$, g(t) > 0
- ✓ Pour tout t de $\left[\frac{\ln 2}{2},a\right]$, $g(t)\geq g(a)$ *donc* $g(t)\geq 0$
- ✓ Pour tout t $[a,+\infty[$, $g(t)\leq g(a)$ *donc* $g(t)\leq 0$.

D'où

Problèmes de révision

x	0		a		$+\infty$
g(x)	0	+	0	-	

2. a) Pour tout x > 0, $f(x)=x\sqrt{e^{\frac{2}{x}}-1}>0$ donc on peut écrire :

$$\ln\left[f(x)\right]=\ln\left(x\sqrt{e^{\frac{2}{x}}-1}\right)=\ln x+\ln\left(\sqrt{e^{\frac{2}{x}}-1}\right)=\ln x+\frac{1}{2}\ln\left(e^{\frac{2}{x}}-1\right).$$

Or $e^{\frac{2}{x}}-1=e^{\frac{2}{x}}\left(1-e^{-\frac{2}{x}}\right)$ donc $\ln\left(f(x)\right)=\ln x+\frac{1}{2}\left[\ln\left(e^{\frac{2}{x}}\right)+\ln\left(1-e^{-\frac{2}{x}}\right)\right]$

$$=\ln x+\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\ln\left(1-e^{-\frac{2}{x}}\right)$$

$$=\frac{1}{x}(1+x\ln x)+\frac{1}{2}\ln\left(1-e^{-\frac{2}{x}}\right)$$

b) On sait que $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x=0$ et $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x=-\infty$ donc $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{x}(1+x\ln x)=+\infty$.

Et $\lim\limits_{x\to 0^+}-\frac{2}{x}=-\infty$ *donc* $\lim\limits_{x\to 0^+}e^{-\frac{2}{x}}=0$ *d'où* $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln\left(1-e^{-\frac{2}{x}}\right)=\ln 1=0$.

Par suite, $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln\left(f(x)\right)=+\infty$.

Or $f(x)=e^{\ln(f(x))}$ donc $\lim\limits_{x\to 0^+}e^{\ln(f(x))}=+\infty$. On en déduit que $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=+\infty$.

3. a) $0\le x\le 1\Leftrightarrow 1\le e^x\le e$ donc pour tout t de [0, 1] et pour tout x de [0, t] , on peut écrire : $\int_0^t dx\le\int_0^t e^x dx\le\int_0^t e\,dx\Leftrightarrow t\le e^t-1\le et$.

D'où pour tout t de [0, 1] , $0\le e^t-1\le et$

NB :

Pour tout t **positif**, $e^t-1\ge 0$.

Posons h(t) = e^t-1-et, où t $\in[0,1]$:

h est dérivable sur [0,1] et on a h'(t) = e^t-e.

Comme $t\le 1$ alors $e^t\le e$ donc h'(t) ≤ 0 d'où h est décroissante sur [0, 1].

Par suite : $0\le t\le 1\Rightarrow h(1)\le h(t)\le h(0)$ d'où $e^t-1-et\le 0\Rightarrow e^t-t\le et$.

On résume : pour tout t de [0, 1] , $0\le e^t-1\le et$.

b) Pour tout u de [0, 1] et pour tout t de [0, u], on peut écrire :

$$0\le\int_0^u\left(e^t-1\right)dt\le\int_0^u et\,dt\Leftrightarrow 0\le\left[e^t-t\right]_0^u\le e\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^u$$

$$\Leftrightarrow 0\le e^u-u-1\le e\frac{u^2}{2}\Leftrightarrow 1+u\le e^u\le 1+u+e\frac{u^2}{2}$$

Problèmes de révision

c) Pour tout x ≥ 2, $\left[f(x)\right]^2 - 2x = x^2\left(e^{\frac{2}{x}} - 1\right) - 2x$.

Or $x \geq 2 \Rightarrow \frac{2}{x} \leq 1$, on peut donc poser $u = \frac{2}{x}$ et utiliser les inégalités

$1+u \leq e^u \leq 1+u+e\frac{u^2}{2}$ qui donnent $1+\frac{2}{x} \leq e^{\frac{2}{x}} \leq 1+\frac{2}{x}+e\frac{2}{x^2}$.

En multiplions par x^2, on obtient : $x^2+2x \leq x^2e^{\frac{2}{x}} \leq x^2+2x+2e$

D'où $2x \leq x^2e^{\frac{2}{x}} - x^2 \leq 2x+2e \Leftrightarrow 2x \leq x^2\left(e^{\frac{2}{x}} - 1\right) \leq 2x+2e$

C'est-à-dire : $2x \leq \left[f(x)\right]^2 \leq 2x+2e$.

d) On a : pour tout x ≥ 2, $2x \leq \left[f(x)\right]^2 \leq 2x+2e$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} 2x = +\infty$

donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)\right]^2 = +\infty$ d'où $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

4. a) Pour tout x > 0, $\frac{2}{x} > 0$ donc $e^{\frac{2}{x}} > 1$ ou encore $e^{\frac{2}{x}} - 1 > 0$.

Ainsi, la fonction $x \mapsto e^{\frac{2}{x}} - 1$ est dérivable et strictement positive sur $]0,+\infty[$

donc $x \mapsto \sqrt{e^{\frac{2}{x}} - 1}$ est dérivable sur $]0,+\infty[$.

Comme la fonction $x \mapsto x$ est dérivable sur $]0,+\infty[$, alors f est dérivable sur $]0,+\infty[$.

Pour tout x > 0, $f'(x) = \sqrt{e^{\frac{2}{x}} - 1} + x\frac{-\frac{2}{x^2}e^{\frac{2}{x}}}{2\sqrt{e^{\frac{2}{x}} - 1}} = \sqrt{e^{\frac{2}{x}} - 1} - \frac{1}{x\sqrt{e^{\frac{2}{x}} - 1}}e^{\frac{2}{x}}$

$$= \frac{x\left(e^{\frac{2}{x}} - 1\right) - e^{\frac{2}{x}}}{x\sqrt{e^{\frac{2}{x}} - 1}} = \frac{1}{x\sqrt{e^{\frac{2}{x}} - 1}}\left[x\left(e^{\frac{2}{x}} - 1\right) - e^{\frac{2}{x}}\right]$$

$$= \frac{e^{\frac{2}{x}}}{x\sqrt{e^{\frac{2}{x}} - 1}}\left[x\left(1 - e^{-\frac{2}{x}}\right) - 1\right] = \frac{e^{\frac{2}{x}}}{\sqrt{e^{\frac{2}{x}} - 1}}\left[\left(1 - e^{-\frac{2}{x}}\right) - \frac{1}{x}\right]$$

$$= \frac{e^{\frac{2}{x}}}{\sqrt{e^{\frac{2}{x}} - 1}}g\left(\frac{1}{x}\right)$$

b) Dressons le tableau de variations de f :

Problèmes de révision

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{e^{\frac{2}{x}}}{\sqrt{e^{\frac{2}{x}}-1}}g\left(\frac{1}{x}\right)=0 \Leftrightarrow g\left(\frac{1}{x}\right)=0 \Leftrightarrow \frac{1}{x}=a \Leftrightarrow x=\frac{1}{a}$$

$$f'(x)>0 \Leftrightarrow \frac{e^{\frac{2}{x}}}{\sqrt{e^{\frac{2}{x}}-1}}g\left(\frac{1}{x}\right)>0 \Leftrightarrow g\left(\frac{1}{x}\right)>0 \Leftrightarrow 0<\frac{1}{x}<a \Leftrightarrow x>\frac{1}{a}$$

x	0		$\frac{1}{a}$		$+\infty$
f'(x)		-	0	+	
f(x)	$+\infty$	↘	$f\left(\frac{1}{a}\right)$	↗	$+\infty$

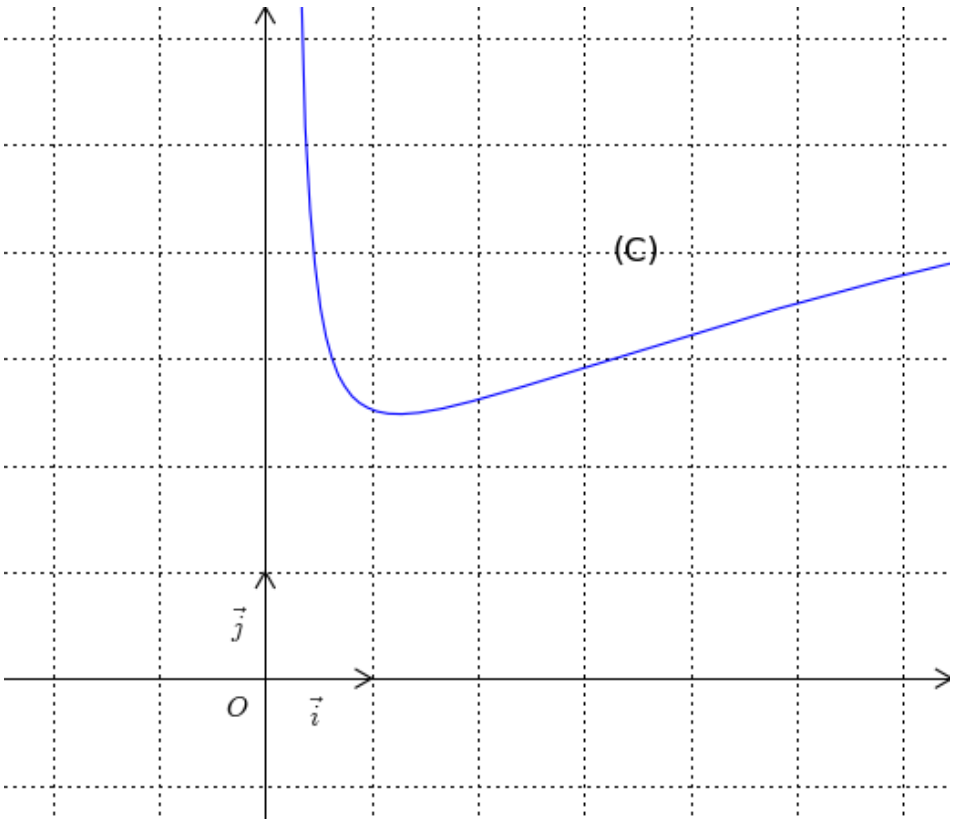
c) l'axe $(O,\vec{j})$ est asymptote à la courbe (C) de f.

On a : pour tout $x \geq 2$, $\sqrt{2x} \leq f(x) \leq \sqrt{2x+2e}$

donc $\frac{\sqrt{2x}}{x} \leq \frac{f(x)}{x} \leq \frac{\sqrt{2x+2e}}{x} \Leftrightarrow \sqrt{\frac{2}{x}} \leq \frac{f(x)}{x} \leq \sqrt{\frac{2}{x}+\frac{2e}{x^2}}$

Or $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{2}{x}}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{2}{x}+\frac{2e}{x^2}}=0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=0$

Et ainsi (C) admet une branche parabolique de direction $(O,\vec{i})$ au voisinage de $+\infty$.



Problèmes de révision

Problème 2 :

A- 1° / a) On a pour tout x > -1, $f_1(x) = \dfrac{e^x}{x+1}$.

$\lim\limits_{x\to(-1)^+} f_1(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f_1(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} \cdot \dfrac{x}{x+1} = +\infty$

La fonction f_1 est dérivable sur $]-1;+\infty[$ (quotient de deux fonctions dérivables), et on a : $f_1'(x) = \dfrac{e^x(1+x) - e^x}{(x+1)^2} = \dfrac{x\,e^x}{(1+x)^2}$.

$f_1'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Le signe de $f_1'(x)$ est celui de x, d'où le tableau de variation de f_1 :

x	-1		0		$+\infty$
f'(x)	‖	-	0	+	
f(x)	$+\infty$ ↘	‖	1	↗	$+\infty$

D'autre part : pour tout x > -1, $f_2(x) = \dfrac{e^x}{(x+1)^2}$.

$\lim\limits_{x\to(-1)+} f_2(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f_2(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^2}\cdot\dfrac{x^2}{(x+1)^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^2}\cdot\left(\dfrac{1}{1+\frac{1}{x}}\right)^2 = +\infty$

f_2 est dérivable sur $]-1,+\infty[$ et $f_2'(x) = \dfrac{e^x(1+x)^2 - 2(x+1)e^x}{(1+x)^4}$

Problèmes de révision

d'où $f_2'(x) = \dfrac{e^x(1 + x - 2)}{(1 + x)^3} = \dfrac{(x - 1)e^x}{(1 + x)^3}$.

$f_2'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Le signe de $f_2'(x)$ est celui de x - 1, d'où le tableau de variation de f_2 :

x	-1	1	$+\infty$
f'(x)	-	0	+
f(x)	$+\infty$ ↘	$\frac{e}{4}$	↗ $+\infty$

b) Etudions la position de Position de (C_1) et (C_2) :

Pour tout x > -1, $f_1(x) - f_2(x) = \dfrac{xe^x}{(1-x)^2} = \dfrac{-xe^x}{(1 + x)^2}$.

- Si $x \in]-1,0[$, on a $f_1(x) - f_2(x) < 0$ donc (C_1) est au dessous de (C_2).
- Si $x \in]0,+\infty[$, on a $f_1(x) - f_2(x) > 0$ donc (C_1) est au dessus de (C_2).
- Pour x = 0 on a $f_1(x) = f_2(x) = 0$ donc $(C_1) \cap (C_2) = \{I(0,1)\}$.

Etudions les branches infinies à (C_1) et à (C_2):

La droite d'équation x = -1 est une asymptote verticale commune à (C_1) et (C_2).

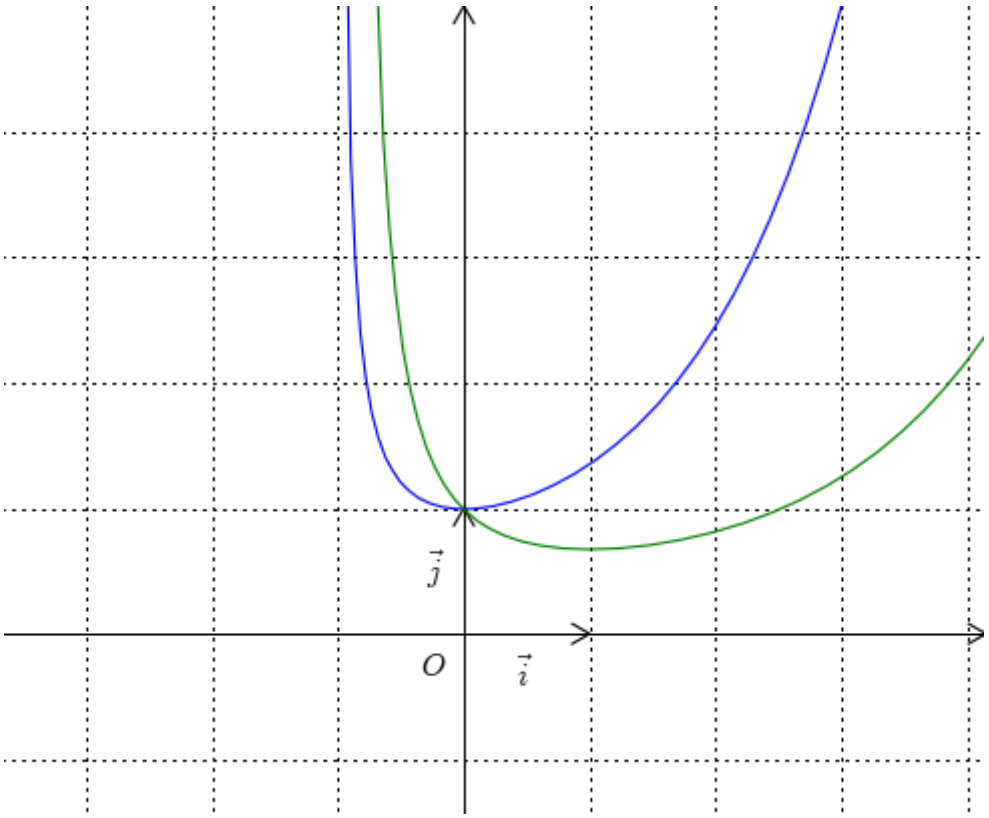
$$\lim_{x\to +\infty} \frac{f_1(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x(x+1)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^2}.\left(\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\right) = +\infty .$$

Donc la courbe (C_1) admet une branche parabolique de direction $\left(O, \vec{j}\right)$ au voisinage de $+\infty$.

Problèmes de révision

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f_2(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x(x+1)^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^3}.\left(\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\right)^2=+\infty$$

Donc la courbe (C_2) admet une branche parabolique de direction $\left(O,\vec{j}\right)$ au voisinage de $+\infty$.



c) L'aire en cm² de la partie du plan limité par (C_1) et (C_2) et les droites d'équations x = 0 et x = 1 est : $A = \left(\int_0^1 (f_1(x)-f_2(x))dx\right)$ x ua$=\int_0^1 \frac{xe^x}{(1+x)^2}dx.4cm^2$.

On intègre par parties et on pose :

$u(x)= xe^x$	$u'(x)=(x+1)e^x$
$v'(x)=\frac{1}{(1+x)^2}$	$v(x)=-\frac{1}{1+x}$

Problèmes de révision

On a donc :

$$A = \left(\left[\frac{-xe^x}{1 + x} \right]_0^1 + \int_0^1 e^x dx \right) . 4\ cm^2 = \left(\frac{-e}{2} + e - 1 \right) 4cm^2 = \left(\frac{e}{2} - 1 \right) 4cm^2$$

Ainsi : $A = (2e - 4)\ cm^2$.

2. a) La fonction f_n est dérivable sur $]-1, +\infty[$ et $f_n'(x) = \frac{e^x(x + 1 - n)}{(1 + x)^{n+1}}$.

On a donc : $f_n'(x) = 0 \Leftrightarrow x + 1 - n = 0 \Leftrightarrow x = n - 1$.

Comme $n \in \mathbb{N}^*$ alors $n > 0$ donc $n - 1 > -1$.

x	-1		n-1		$+\infty$
f'(x)		-	0	+	

La fonction f_n admet en (n -1) un minimum absolu sur $]-1; +\infty[$ égal à $u_n = f_n(n - 1)$.

b) $\lim\limits_{n \to +\infty} \ln u_n = \lim\limits_{n \to +\infty} \ln\left(\frac{e^{n-1}}{n^n}\right) = \lim\limits_{n \to +\infty} n - 1 - n\ln n = \lim\limits_{x \to +\infty} n(1 - \ln n) - 1 = -\infty$

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} e^{\ln u_n} = 0$ d'où $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.

B- Pour $x > \frac{1}{e}$, on pose $F(x) = \int_0^{\ln x} f_2(t)dt$

1. La fonction f_2 est continue sur $]-1, \infty[$ et par suite f_2 est continue sur $\left]\frac{1}{e}, +\infty\right[$ donc F est définie sur $\left]\frac{1}{e}, +\infty\right[$.

2. on a donc pour tout $x > \frac{1}{e}$,

si $0 \le t \le \ln x$ alors $1 \le e^t \le x$ et comme $(1+t)^2 > 0$ alors

Problèmes de révision

$\frac{e^t}{(1+t)^2} \le \frac{x}{(1+t)^2}$ d'où $\int_0^{\ln x} \frac{e^t}{(1+t)^2}dt \le \int_0^{\ln x} \frac{x}{(1+t)^2}dt \Leftrightarrow F(x) \le x\left[-\frac{1}{1+t}\right]_0^{\ln x}$

Ainsi, pour tout $x > \frac{1}{e}$, $F(x) \le x\left(1-\frac{1}{\ln x+1}\right)$

On a $\lim\limits_{x\to\left(\frac{1}{e}\right)^+} \ln x+1 = 0^+$ donc $\lim\limits_{x\to\left(\frac{1}{e}\right)^+} x\left(1-\frac{1}{\ln x+1}\right) = -\infty$, il en suit : $\lim\limits_{x\to\left(\frac{1}{e}\right)^+} F(x) = -\infty$

3. a) On intègre par parties, on pose :

$u(t) = \frac{1}{(1+t)^2}$	$u'(t) = \frac{-2}{(1+t)^3}$
$v'(t) = e^t$	$v(t) = e^t$

On a donc $F(x) = \left[\frac{e^t}{(1+t)^2}\right]_0^{\ln x} + 2\int_0^{\ln x} \frac{e^t}{(1+t)^3}dt = \frac{x}{(1+\ln x)^2} - 1 + 2\int_0^{\ln x} f_3(t)dt$

Comme pour tout $x \ge 1$ et pour tout t de $[0,\ln x]$, $f_3(t) \ge 0$ alors $\int_0^{\ln x} f_3(t)dt \ge 0$

Donc $F(x) \ge \frac{x}{(1+\ln x)^2} - 1$.

On a $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln^2 x}{x} = 0^+$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{(1+\ln x)^2} - 1 = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{\ln^2 x}.\frac{1}{\left(\frac{1}{\ln x}+1\right)^2} = +\infty$

et donc : $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = +\infty$.

4. On a :

- ✓ la fonction ln est dérivable sur $\left]\frac{1}{e}, +\infty\right[$
- ✓ Pour tout x de $\left]\frac{1}{e}, +\infty\right[$, $\ln t \in]-1,+\infty[$

✓ La fonction f_2 est continue sur $]-1,+\infty[$

donc F est dérivable sur $\left]\frac{1}{e}, +\infty\right[$ et on a :

$$F'(x)=\frac{1}{x}f_2(\ln x)=\frac{1}{x}.\frac{x}{(1+\ln x)^2}=\frac{1}{(1+\ln x)^2}>0$$

D'où F est strictement croissante sur $\left]\frac{1}{e}, +\infty\right[$.

Soit donc le tableau de variation de F :

x	$\frac{1}{e}$		$+\infty$
F'(x)	‖	+	
F(x)	‖ $-\infty$	↗	$+\infty$

Ainsi la fonction F est une bijection de $\left]\frac{1}{e}, +\infty\right[$ sur $\mathbb{R}$.

C- On a pour tout $n \geq 1$, $I_n = \int_0^1 f_n(t)dt$.

1. $I_{n+1} - I_n = \int_0^1 (f_{n+1}(t) - f_n(t))dt$

or pour tout x de [0, 1] et $n \geq 1$, on a : $f_{n+1}(t) - f_n(t) \leq 0$

Donc $\int_0^1 (f_{n+1}(t) - f_n(t))dt \leq 0$ d'où $I_{n+1} - I_n \leq 0$ et par suite la suite (I_n) est décroissante.

On a pour tout t de $[0,1]$, $f_n(t) \geq 0$ donc pour tout $n \geq 1$, $I_n = \int_0^1 f_n(t)dt \geq 0$.

Il en résulte que la suite (I_n) est minorée par 0.

Ainsi , (I_n) est décroissante et minorée par 0 donc (I_n) est convergente.

2. a) $I_n = \int_0^1 f_n(t)dt = \int_0^1 \frac{e^t}{(1+t)^n}dt$

$0 \le t \le 1 \Leftrightarrow 1 \le e^t \le e \Leftrightarrow \frac{1}{(1+t)^n} \le f_n(t) \le \frac{e}{(1+t)^n}$ donc

$$\int_0^1 \frac{1}{(1+t)^n}dt \le \int_0^1 f_n(t)dt \le \int_0^1 \frac{e}{(1+t)^n}dt \Leftrightarrow -\frac{1}{n-1}\left[\frac{1}{(1+t)^{n-1}}\right]_0^1 \le I_n \le -\frac{e}{n-1}\left[\frac{1}{(1+t)^{n-1}}\right]_0^1$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{1-n}\left(\frac{1}{2^{n-1}} - 1\right) \le I_n \le \frac{e}{1-n}\left(\frac{1}{2^{-1}} - 1\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{n-1}\left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right) \le I_n \le \frac{e}{n-1}\left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right)$$

c) On a : $\frac{1}{2} \in]-1,1[$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = 0$

d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n-1}\left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right) = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{e}{n-1}\left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right) = 0$ il en suit : $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$.

3. a) Pour tout x >-1, $f_n'(x) = \frac{e^x(x+1-n)}{(x+1)^{n+1}} = \frac{e^x}{(x+1)^n} - n\frac{e^x}{(x+1)^{n+1}} = f_n(x) - nf_{n+1}(x)$

b) Il en résulte : $\int_0^1 f_n'(x)dx = \int_0^1 f_n(x)dx - n\int_0^1 f_{n+1}(x)dx = I_n - nI_{n+1}$

donc $I_n - nI_{n+1} = \frac{e}{2^n} - 1 \Leftrightarrow nI_{n+1} = I_n - \frac{e}{2^n} + 1$

Or $\lim\limits_{x\to+\infty} I_n = 0$ $I_n = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e}{2^n} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} nI_{n+1} = 1$.

Problèmes de révision

Problème 2 :

Partie A -

1° Pour tout $x \geq 1$, $f_1(x) = \dfrac{\ln x}{x^2}$

On sait que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x^2} = 0$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f_1(x) = 0$.

f_1 est le quotient de deux fonctions dérivables sur I, elle est définie sur I elle est donc dérivable sur I

$$f_1'(x) = \frac{\frac{1}{x} \times x^2 - 2x \ln x}{x^4} = \frac{x - 2x \ln x}{x^4} = \frac{1 - 2 \ln x}{x^3}$$

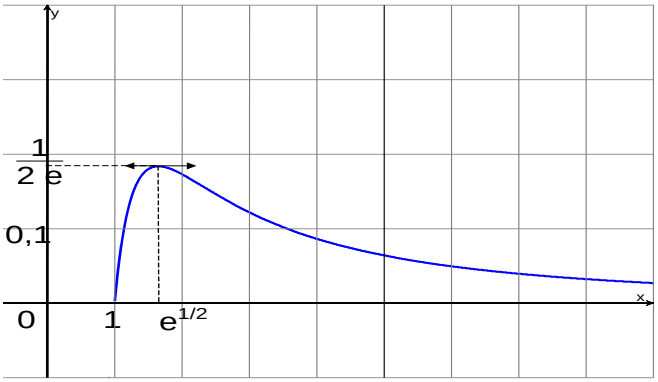
Sur I, la fonction $f_1'(x)$ est du signe de $1 - 2 \ln x$

$1 - 2 \ln x \geq 0 \Leftrightarrow 1 \geq 2 \ln x \Leftrightarrow \ln x \leq \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x \leq e^{\frac{1}{2}}$

x	1		$e^{1/2}$		$+\infty$
signe de f_1'		+	0	–	
f_1	0	↗	$\frac{1}{2e}$	↘	0

$f_1\left(e^{\frac{1}{2}}\right) = \dfrac{1}{2e}$

2° La droite des abscisses est asymptote à (C_1) au voisinage de $+\infty$.



3° On pose :

$u(t) = \ln t$	$u'(t) = \dfrac{1}{t}$
$v'(t) = \dfrac{1}{t^2}$	$v(t) = -\dfrac{1}{t}$

On obtient :

$$I_1(x) = \left[-\frac{1}{t}.\ln t\right]_1^x + \int_1^x \frac{dt}{t^2} = -\frac{\ln x}{x} + \left[-\frac{1}{t}\right]_1^x = -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} + 1$$

Problèmes de révision

Partie B

1° *On sait que pout tout entier naturels n et m,* $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(\ln x)^n}{x^m}=0$

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)=0$.

2° a) *f_n est la quotient de deux fonctions dérivables sur I, elle est définie sur i elle est donc dérivable sur I.*

$$f_n'(x)=\frac{n(\ln x)^{n-1}\times\frac{1}{x}\times x^2-2x\times(\ln x)^n}{x^4}=\frac{n(\ln x)^{n-1}\times x-2x\times(\ln x)^n}{x^4}$$

$$=\frac{(\ln x)^{n-1}(n-2\ln x)}{x^3}$$

Pour tout réel x de I ln x > et x^3 > 0 donc $f_n'(x)$ est du signe de n - 2 ln x

$n-2\ln x\geq 0\Leftrightarrow\frac{n}{2}\geq x\Leftrightarrow x\leq e^{n/2}$

x	1		$e^{n/2}$		$+\infty$
signe de f_n'		+	0	–	
f_n	0	↗	$f_n(e^{n/2})$	↘	0

b) La valeur maximale de f_n sur I est : $f_n(e^{1/2})=\frac{1}{n!}\frac{(\ln(e^{n/2}))^n}{(e^{n/2})^2}=\frac{1}{n!}\frac{\left(\frac{n}{2}\right)^n}{e^n}=\frac{1}{n!}\left(\frac{n}{2e}\right)^n$

3° a) *Soit $x\in I$.*

$$f_2(x)-f_1(x)=\frac{1}{2!}\times\frac{(\ln x)^2}{x^2}-\frac{\ln x}{x^2}=\frac{\ln x}{x^2}\left(\frac{\ln x}{2}-1\right)$$

$f_2(x)-f_1(x)\geq 0\Leftrightarrow\frac{\ln x}{2}-1\geq 0\Leftrightarrow\ln x\geq 2$

$\Leftrightarrow x\geq e^2$

x	1		e^2		$+\infty$
$f_2(x)-f_1(x)$		–	0	+	

Problèmes de révision

b) $f_2(1) = \frac{(\ln 1)^2}{1^2} \times \frac{1}{2} = 0$ *et* $f_1'(1) = \frac{(\ln 1)^{2-1}(2 - 2\ln 1)}{x^3} = 0$ *L'équation de la tangente est donc* $y = 0$.

4°

a) *Pour* $x > 1$, $\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)} = \frac{1}{(n+1)!} \times \frac{(\ln x)^{n+1}}{x^2} \times (n!) \times \frac{x^2}{(\ln x)^n} = \frac{\ln x}{n+1}$

b) $y_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!}\left(\frac{n+1}{2e}\right)^{n+1} = \frac{1}{n!} \times \frac{1}{2e}\left(\frac{n+1}{2e}\right)^n$

$f_n\left(e^{\frac{n+1}{2}}\right) = \frac{1}{n!} \times \frac{\left(\ln\left(e^{\frac{n+1}{2}}\right)\right)^n}{\left(e^{\frac{n+1}{2}}\right)^2} = \frac{1}{n!} \times \frac{\left(\frac{n+1}{2}\right)^n}{e^{n+1}} = 2\, y_{n+1}$

$e^{\frac{n+1}{2}} \geq e^{\frac{n}{2}}$ donc $f_n\left(e^{\frac{n+1}{2}}\right) \leq f_n\left(e^{\frac{n}{2}}\right)$ car la fonction f_n est décroissante sur $\left[\, e^{\frac{n}{2}}, +\infty \,\right[$

donc $y_{n+1} \leq \frac{1}{2} f_n\left(e^{\frac{n+1}{2}}\right) \leq \frac{1}{2} y_n$ car $f_n\left(e^{\frac{n}{2}}\right) = y_n$

c) Montrons par récurrence que : pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $y_n \leq \frac{1}{e}\frac{1}{2^n}$

On a : $y_1 = \frac{1}{2e} \leq \frac{1}{e} \times \frac{1}{2^1}$.

On suppose que : $y_k \leq \frac{1}{e}\frac{1}{2^k}$ pour $k \geq 1$, et on montre que $y_{k+1} \leq \frac{1}{e}\frac{1}{2^{k+1}}$

Comme $y_{k+1} \leq \frac{1}{2} y_k \leq \frac{1}{2} \times \frac{1}{e} \times \frac{1}{2^k}$. On a donc bien $y_{k+1} \leq \frac{1}{e}\frac{1}{2^{k+1}}$

Conclusion : pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $y_n \leq \frac{1}{e}\frac{1}{2^n}$.

On a pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $0 \leq y_n \leq \frac{1}{e}\frac{1}{2^n}$.

$\frac{1}{2} \in]-1,1[$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{e}.\frac{1}{2^n} = 0$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = 0$.

Problèmes de révision

Partie C -

1° a) Soit $n \geq 1$ un entier. On pose :

$u(t) = \dfrac{(\ln x)^{n+1}}{(n+1)!}$	$u'(t) = (n+1).\dfrac{1}{t}.\dfrac{(\ln x)^n}{(n+1)!} = \dfrac{(\ln t)^n}{n!}.\dfrac{1}{t}$
$v'(t) = \dfrac{1}{t^2}$	$v(t) = -\dfrac{1}{t}$

On obtient :

$$I_{n+1} = \left[-\frac{1}{t}.\frac{(\ln t)^{n+1}}{(n+1)!}\right]_1^x - \int_1^x \frac{(\ln t)^n}{k!}.\frac{1}{t}.\left(-\frac{1}{t}\right)dt = -\frac{1}{x}.\frac{(\ln x)^{n+1}}{(n+1)!} + \frac{1}{n!}\int_1^x \frac{(\ln t)^n}{t^2}dt$$

On a donc bien $I_{n+1}(x) = I_n(x) - \dfrac{1}{(n+1)!}\dfrac{(\ln x)^{n+1}}{x}$.

b) Démontrons par récurrence que pour tout entier $n \geq 1$,

$$I_n(x) = 1 - \frac{1}{x} - \frac{\ln x}{x} - \frac{(\ln x)^2}{2!x} - \ldots - \frac{(\ln x)^{n-1}}{(n-1)!x} - \frac{(\ln x)^n}{n!x}$$

On a démontré que : $I_1(x) = 1 - \dfrac{\ln x}{x} - \dfrac{1}{x}$.

On suppose que : $I_n(x) = 1 - \dfrac{1}{x} - \dfrac{\ln x}{x} - \dfrac{(\ln x)^2}{2!x} - \ldots - \dfrac{(\ln x)^{n-1}}{(n-1)!x} - \dfrac{(\ln x)^n}{n!x}$, pour $k \geq 1$.

$$I_{n+1}(x) = I_n(x) - \frac{1}{(n+1)!}\frac{(\ln x)^{n+1}}{x} = 1 - \frac{1}{x} - \frac{\ln x}{x} - \frac{(\ln x)^2}{2!x} - \ldots - \frac{(\ln x)^{n-1}}{(n-1)!x} - \frac{(\ln x)^n}{n!x} - \frac{1}{(n+1)!}\frac{(\ln x)^{n+1}}{x}$$

Ainsi le résultat est démontré.

2° Soit $\alpha \geq 1$ un nombre réel fixé.

a)

Pour tout réel t de [1 , α], $0 \leq f_n(t) \leq y_n$ On peut intégrer les inégalité (ou utiliser l'inégalité de la moyenne)

On obtient : $0 \times (\alpha - 1) \leq \int_0^\alpha f_n(t)dt \leq (\alpha - 1)\, y_n$ donc $0 \leq I_n(\alpha) \leq (1 - \alpha)\, y_n$

Problèmes de révision

b)
On a vu au B 4° a) que $\lim_{n \to +\infty} y_n = 0$ donc $\lim_{n \to +\infty} (\alpha - 1)\, y_n = 0$
D'après le théorème des gendarmes on a donc : $\lim_{n \to +\infty} I_n(\alpha) = 0$

***3°** Pour $n \geq 1$ et $x \geq 1$ on pose : $W_n(x) = 1 + \frac{\ln x}{1\,!} + \frac{(\ln x)^2}{2\,!} + \ldots + \frac{(\ln x)^n}{n\,!}$*

***a)** Exprimons $W_n(x)$ en fonction de $I_n(x)$:*

$$I_n(x) = 1 - \frac{1}{x} - \frac{\ln x}{x} - \frac{(\ln x)^2}{2!x} - \ldots - \frac{(\ln x)^{n-1}}{(n-1)!x} - \frac{(\ln x)^n}{n!x}$$
$$= 1 - \frac{1}{x}\left(\frac{\ln x}{1!} + \frac{(\ln x)^2}{2!} + \ldots + \frac{(\ln x)^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{(\ln x)^n}{n!} \right)$$
$$= 1 - \frac{1}{x}.W_n(x)$$

Donc $\frac{1}{x} W_n(x) = 1 - I_n(x)$ d'où $W_n(x) = x\,(1 - I_n(x))$

b) $\alpha \geq 1$ étant un nombre réel fixé.

On a vu que $\lim_{n \to +\infty} I_n(\alpha) = 0$ donc $\lim_{n \to +\infty} \alpha\,(1 - I_n(\alpha)) = \alpha = \lim_{n \to +\infty} W_n(\alpha)$

c) On désigne par γ la limite de la suite $(U_n)_{n \geq 1}$ de terme général : $U_n = 1 + \frac{1}{1\,!} + \frac{1}{2\,!} + \ldots + \frac{1}{n\,!}$.

$U_n = W_n(e)$ donc $\lim_{n \to +\infty} U_n = \lim_{n \to +\infty} W_n(e) = e = \gamma$

$U_6 \approx 2{,}7181$ et $\gamma \approx 2{,}7183$.