Lycée IBN KHALDOUN RADES Mr ABIDI Farid	Devoir de synthèse n°3 MATHEMATIQUES	Classe : 3 SE 1 Durée : 3H Mai 2014

Exercice 1: (5 points)

On considère la suite (U_n) définie par : $\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = \dfrac{3U_n + 2}{U_n + 4} \end{cases}$, $n \in \mathbb{N}$.

1. Calculer U_1 et U_2. Montrer que la suite (U_n) n'est ni arithmétique , ni géométrique.
2. a) Montrer que pour tout entier naturel n, $0 \le U_n \le 1$.

   b) Etablir la relation : $U_{n+1} - U_n = \dfrac{(1-U_n)(U_n+2)}{U_n+4}$.

   c) Démontrer que la suite (U_n) est monotone.
3. On considère la suite (V_n) définie par : $V_n = \dfrac{U_n - 1}{U_n + 2}$

   a) Prouver que (V_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{2}{5}$.

   b) Calculer V_0 et exprimer V_n en fonction de n.

   c) En déduire U_n en fonction de n.

   d) Calculer la limite de la suite (U_n).

Exercice 2: (5 points)

A – Une boîte contient **quatre** boules blanches numérotées de 1 à 4 et **six** boules noires numérotées de 5 à 10. On tire simultanément 3 boules de la boîte.

1. Quel le nombre de tirages possibles.

2. Calculer la probabilité de chacun des évènements suivants :

   a) A : « Obtenir 3 boules de la même couleur »

   b) B : « obtenir plus de boules blanches que de boules noires »

   c) C : « Obtenir exactement une boule blanche et un numéro impair »

B – On enlève toutes les boules portant un numéro pair. La boîte contient, désormais, deux boules blanches portant les numéros 1 et 3 et trois boules noires portant les numéros 5, 7 et 9. On tire successivement et avec remise trois boules de la boîte.

1. Quel est le nombre de tirages possibles.

2. Calculer la probabilité de chacun des évènements suivants :

   a) A' : « Obtenir trois boules de même couleur »

   b) B' : « obtenir au moins une boule blanche »

   c) C' : « la somme des numéros portés par les trois boules tirées est égale à 15»

Exercice 3: (5 points)

L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.

On considère les points A(0, 4, 1) , B(1, 3, 0) , C(2, -1, -2) et D(7, -1, 4).

1. a) Démontrer que les points A, B et C déterminent un plan (P).
   b) Montrer qu'une équation cartésienne du plan (P) est : $2x-y+3x+1=0$.
   c) Le point D appartient au plan (P) ?
2. Soit Δ la droite passant par D et perpendiculaire au plan (P).
   a) Donner une représentation paramétrique de la droite Δ.
   b) Déterminer les coordonnées du point H d'intersection de Δ et P.
3. Soit (P_1) le plan d'équation x + y + z = 0 et (P_2) le plan d'équation x + 2y + 2 = 0.
   a) Démontrer que les plans P_1 et P_2 sont sécants.
   b) Vérifier que la droite Δ', intersection des plans P_1 et P_2, a pour représentation paramétrique $\begin{cases} x=-2-4t \\ y=t \\ z=2+3t \end{cases}$, $t\in\mathbb{R}$.
   c) Δ' et P sont-ils sécants ou parallèles ?

Exercice 4 : (5 points)

Le tableau suivant donne l'indice mensuel des dépenses d'assurance maladie de Juin 2013 à Avril 2014.

Mois	Juin 13	Aout 13	Octobre 13	Décembre 13	Février 14	Avril 14
Rang du mois x_i	1	3	5	7	9	11
Indice y_i	123,4	125,9	127,5	127,9	129	131,4

Pour tout l'exercice, les détails des calculs statistiques ne sont pas demandés. Les résultats seront arrondis avec deux chiffres après la virgule.

1. Représenter le nuage de points $M_i\,(x_i\,;\,y_i)$ associé à la série statistique dans un repère orthogonal d'unité :
   - 1 cm sur l'axe des abscisses à partir de 0 pour une unité.
   - 1 cm sur l'axe des ordonnées à partir de 130 pour une unité.
2. Déterminer les coordonnées du point G et placer ce point sur le graphique.

3. Calculer la variance et l'écart type de chacun des deux caractères X et Y.

4. a) G_1 désigne le point moyen des trois premiers points du nuage et G_2 celui des trois derniers points. Déterminer les coordonnées de G_1 et de G_2.

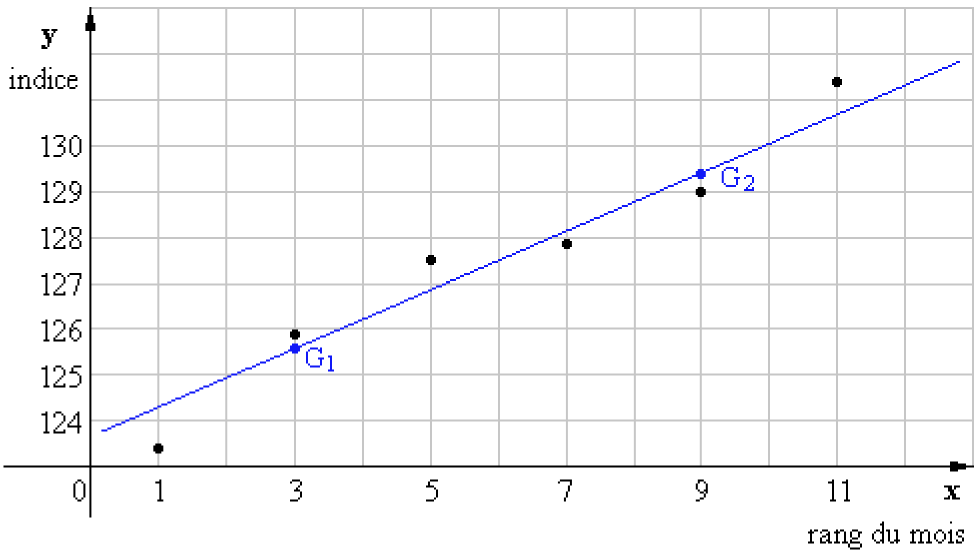
   b) Déterminer l'équation réduite de la droite (G_1G_2) sous la forme $y = ax + b$.

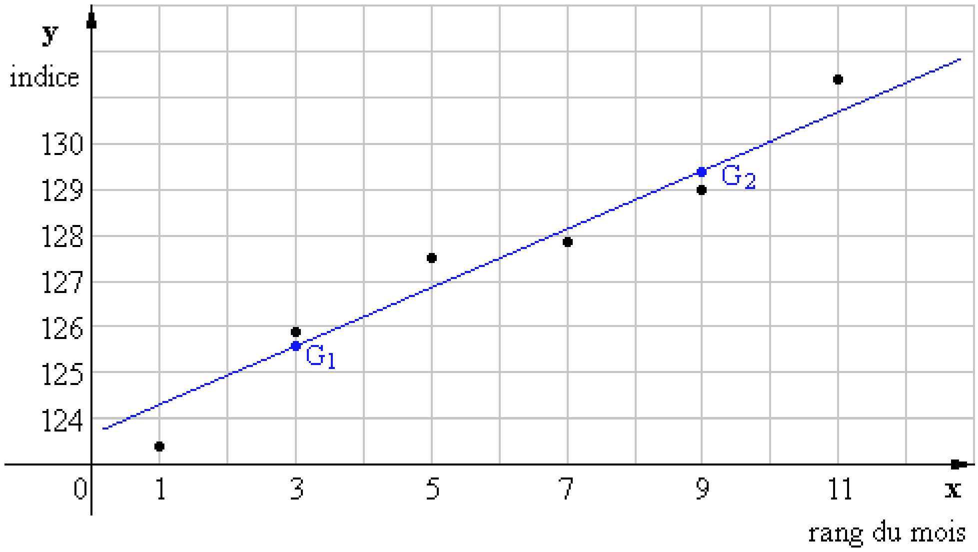
   c) Tracer la droite $(G_1\,G_2)$ sur le graphique de l'annexe ci-jointe à la page 4/4.

   d) Donner une estimation des dépenses d'assurance maladie de Juin 2014.

Annexe à compléter et à rendre avec la copie

Nom de l'élève :





1. Déterminer les coordonnées du point G et placer ce point sur le graphique. (0,75 point)

On a :

$$\frac{1+3+5+7+9+11}{6} = \frac{36}{6} = 6$$

$$\frac{123{,}4 + 125{,}9 + 127{,}5 + 127{,}9 + 129 + 131{,}4}{6} = \frac{765{,}1}{6} = 127{,}52$$

donc le point moyen G a pour coordonnées (6 ; 127, 52) .

2. Le modèle étudié dans cette question sera appelé " droite de Mayer ".

2. a. G_1 désigne le point moyen des trois premiers points du nuage et G_2 celui des trois derniers points. Déterminer les coordonnées de G_1 et de G_2 . (0,5 point)

Soit G_1 le point moyen des trois premiers points du nuage : {(1 ; 123,4), (3 ; 125,9), (5 ; 127,5)} .

$$\frac{1+3+5}{3} = \frac{9}{3} = 3$$

$$\frac{123{,}4 + 125{,}9 + 127{,}5}{3} = \frac{376{,}8}{3} = 125{,}6$$

donc G_1 admet pour coordonnées (3 ; 125,6) .

Soit G_1 le point moyen des trois premiers points du nuage : {(7 ; 127,9), (9 ; 129), (11 ; 131,4)} .

$$\frac{7+9+11}{3} = \frac{27}{3} = 9$$

$$\frac{127{,}9+129+131{,}4}{3} = \frac{388{,}3}{3} = 129{,}43$$

donc G_2 admet pour coordonnées (9 ; 129,43) .

2. b. Déterminer l'équation réduite de la droite (G_1G_2) sous la forme y = Ax + B. (1 point)

Nous pouvons utiliser deux méthodes pour arriver à ce résultat.

<u>1ère méthode :</u>

G_1 et G_2 appartiennent à la droite (G_1G_2) ,

donc leurs coordonnées vérifient l'équation de la droite (G_1G_2) ,

donc :

- 125,6 = 3A + B
- 129,43 = 9A + B

donc A et B sont solutions du système :

$$\begin{cases} 3A + B = 125{,}6 \\ 9A + B = 129{,}43 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} B = 125{,}6 - 3A \\ 129{,}43 = 9A + 125{,}6 - 3A \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} B = 125{,}6 - 3A \\ 6A = 3{,}83 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A = 0{,}64 \quad \text{à } 10^{-2} \text{ près.} \\ B = 123{,}68 \quad \text{à } 10^{-2} \text{ près.} \end{cases}$$

donc une équation de la droite ($G_1 G_2$) est $y = 0{,}64x + 123{,}68$.

<u>2ème méthode :</u> (plus belle d'un point de vue mathématiques)

Soit (x_1,y_1) les coordonnées de G_1 et (x_2,y_2) les coordonnées de G_2 .

Le coefficient directeur de la droite G_1 et G_2 est :

$$A = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{129{,}43 - 125{,}6}{9 - 3} = 0{,}64 \quad \text{à } 10^{-2} \text{ près}$$

Pour calculer la valeur de B , on utilise les coordonnées de G_1 ou G_2 (qui vérifient l'équation de la droite (G_1G_2) puisque G_1 et G_2 appartiennent à cette droite !).

Avec G_1 on obtient : $125{,}6 = 0{,}64 \times 3 + B$, d'où $B = 123{,}68$.

L'équation réduite de la droite (G_1G_2) est donc : **$y = 0{,}64\, x + 123{,}68$** .

<u>Remarque :</u>

On a : $0,64 \times 6 + 123,68 = 127,52$ donc la droite (G_1G_2) passe par le point G .

2. c. Tracer la droite $(G_1 G_2)$ sur le graphique précédent. (0,5 point)