Exercice 1 : b) ; c) ; c)

Exercice 2 :

1. a) -2 est la solution réelle de (E).
   b) (E) $\Leftrightarrow$ (z + 2)$(z^2 + (3+i)z + 4) = 0 \Leftrightarrow$z= -2 ou $z^2 + (3+i)z + 4 = 0$
   Δ = -8 + 6i = $(1+3i)^2$
   L'ensemble de solutions de (E) est $\{-2, -1-i, -2-2i\}$.
2. a) $1+i = \left[\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right]$ donc f est la similitude directe de centre O, de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$.
   b) M≠O , M' = f(M) $\Leftrightarrow$ OM' = $\sqrt{2}OM$ et $\left(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}\right) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$

$$MM'^2 = OM^2 + OM'^2 - 2OM.OM'\cos\frac{\pi}{4} = OM^2 .$$

Donc OMM' est isocèle est rectangle en M.
La perpendiculaire en M à la droite (OM) coupe le cercle le centre O et de rayon MM' en M et M'' tel que OMM' soit un triangle de sens direct.

3.a) $z_0 = -1+i,\ z_1 = -2,\ z_2 = -2-2i,\ z_3 = -4i$ et $z_4 = 4-4i$.

b) On démontre par récurrence que : pour tout n de $\mathbb{N}$, $z_n = (1+i)^n . z_0$.

$$O, A_0 \text{ et } A_n \text{ sont alignés} \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{OA_0}, \overrightarrow{OA_n}\right) = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow \arg\left(\frac{z_n}{z_0}\right) = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow n.\arg(1+i) = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow n\frac{\pi}{4} = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

D'où $n = 4k\pi$, $k \in \mathbb{N}$.

Exercice 3 :

1.a) AB = BD et A≠B donc il existe un unique antidéplacement f qui transforme A en B et B en D.

b) $f \circ f(A) = f(B) = D \neq A$ donc $f \circ f \neq Id_P$.

f est un antidéplacement différent de Id_P donc f n'est pas une symétrie orthogonale d'où f est une symétrie glissante.

Soit $\vec{u}$ le vecteur de f, $f \circ f = t_{\vec{u}}$ donc $2\vec{u} = \overrightarrow{AD} \Leftrightarrow \vec{u} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} \Leftrightarrow \vec{u} = \overrightarrow{AJ}$.

Soit Δ l'axe de f.

f(A) = B donc I, milieu de [AB] appartient à (Δ).

f(B) = D donc O milieu de [BD] appartient à (Δ). I ≠ O donc Δ=(OI).

c) Soit D' = f(D), ABD est un triangle équilatéral direct donc f(ABD) = BDD' est un triangle équilatéral indirect. Comme BDC est un triangle équilatéral indirect alors f(D) = D' = C.

2. a) On a : σ(A) = C et ABD est un triangle équilatéral direct.

- si σ(B) = B alors σ(D) = D et comme CDB est un triangle équilatéral indirect, on conclue que : $\sigma([BD]) = [BD]$.

- si σ(B) = D alors σ(D) = B : impossible car CDB est direct.

b) σ est un antidéplacement fixant B et D donc $\sigma = S_{(BD)}$.

3. a) – si g(A) = D alors g(D) = B ou g(D) = C .

Supposons que g(A) = D et g(D) = C alors g(B) = B. Impossible car ABD et DBC de même sens.

Donc g(D).

b) … g est une symétrie glissante de vecteur $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AI}$ et d'axe (JO).

Exercice 4

1.a) $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x) = 0 = f(-2)$ donc f est continue à droite en (-2).

b) $\lim\limits_{x\to -2^+} \frac{f(x)-f(-2)}{x+2} = \lim\limits_{x\to -2^+} \ln(x+2) = -\infty$.

c) Pour tout x de]-2, 2] , f'(x) = $\ln(x+2)+1$.

f'(x) = 0 ⇔ ln(x + 2) = -1 ⇔ x = $e^{-1}-2$.

x	-2		$e^{-1}-2$		2
f'(x)	|	-	0	+	
f(x)	0	↘	$-e^{-1}$	↗	4 ln4

2. a) Pour tout x de]-2, 2] , f(x) - g(x) = $x\sqrt{4-x^2}$.
(C) est au dessous de (C ') sur [-2 , 0] et (C) est au dessus de (C ') sur [0 , 2].
C ∩ C '={A(0, 2ln2)}
b) Voir figure.

3. a) Si $\alpha > 0$: $A_\alpha = \int_0^\alpha (f(x)-g(x))dx = \int_0^\alpha x\sqrt{4-x^2}dx$.

Si $\alpha<0$: $A_\alpha=\int_\alpha^0\left(g(x)-f(x)\right)dx=\int_\alpha^0-x\sqrt{4-x^2}dx=\int_0^\alpha x\sqrt{4-x^2}dx$.

b) $A_\alpha=-\frac{1}{2}\int_0^\alpha-2x\sqrt{4-x^2}dx=-\frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}\left(4-x^2\right)\sqrt{4-x^2}\right]_0^\alpha=\frac{8}{3}-\frac{1}{3}\left(4-\alpha^2\right)\sqrt{4-\alpha^2}$.

c) L'aire de la partie du plan délimitée par les deux courbes C et C ' est $A_{-2}=\frac{8}{3}$.

Exercice 5 :

1. Pour tout x de [0, 1], $f_n'(x)=-e^{-x}-(2n+1)x^{2n}<0$.

x	0	1
$f_n'(x)$	-	
$f_n(x)$	1 ↘	$e^{-1}-1$

2. f_n est continue et strictement décroissante sur [0, 1] donc f_n réalise une bijection de [0, 1] sur $f_n([0,1])=[e^{-1}-1,1]$.
   $e^{-1}-1<0$ donc l'équation $f_n(x)=0$ admet une solution unique u_n dans]0, 1[.
3. a) Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $0<x<1\Rightarrow x^{2n+1}<x^{2n}\Rightarrow f_{n+1}(x)<f_n(x)$.
   b) Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $u_{n+1}\in]0,1[$ donc $f_n(u_{n+1})<f_{n+1}(u_{n+1})\Leftrightarrow f_n(u_{n+1})<0$.
   c) Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $u_n\in]0,1[$ et $f_n(u_{n+1})<0\Leftrightarrow f_n(u_{n+1})<f_n(u_n)$.
   Comme f_n^{-1} est strictement décroissante sur $[e^{-1}-1,1]$ alors $u_{n+1}>u_n$.
   Ainsi, la suite (u_n) est croissante et majorée par 1 donc convergente.
4. a) Pour tout $n\geq1$, $f_n(u_n)=0\Leftrightarrow e^{-u_n}-{u_n}^{2n+1}=0\Leftrightarrow e^{-u_n}={u_n}^{2n+1}\Leftrightarrow -u_n=(2n+1)\ln(u_n)$
   $\Leftrightarrow \ln(u_n)=-\frac{u_n}{2n+1}$.
   b) Soit $\ell=\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\ln(u_n)=\lim\limits_{n\to+\infty}-\frac{1}{2n+1}.u_n\Leftrightarrow\ln(\ell)=0\Leftrightarrow\ell=1$.