Exercice 1 :

1) c) ; 2) b) ; 3) a)

La justification n'est pas demandée, cependant, on donne à titre indicatif la démarche à suivre.

1) On peut utiliser la calculatrice et prendre les valeurs : 5, 10,…

$(-5)+1+e^{5}$; 144,5 et $(-10)+1+e^{10}$; 22017,4 .

Ou encore $\lim\limits_{x\to-\infty} x+1+e^{-x} = \lim\limits_{x\to-\infty} x+1+\frac{1}{e^{x}} = \lim\limits_{x\to-\infty} x\left(1+\frac{1}{xe^{x}}\right)+1=+\infty$

car $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^{x}=0^{-}$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{xe^{x}}=-\infty$

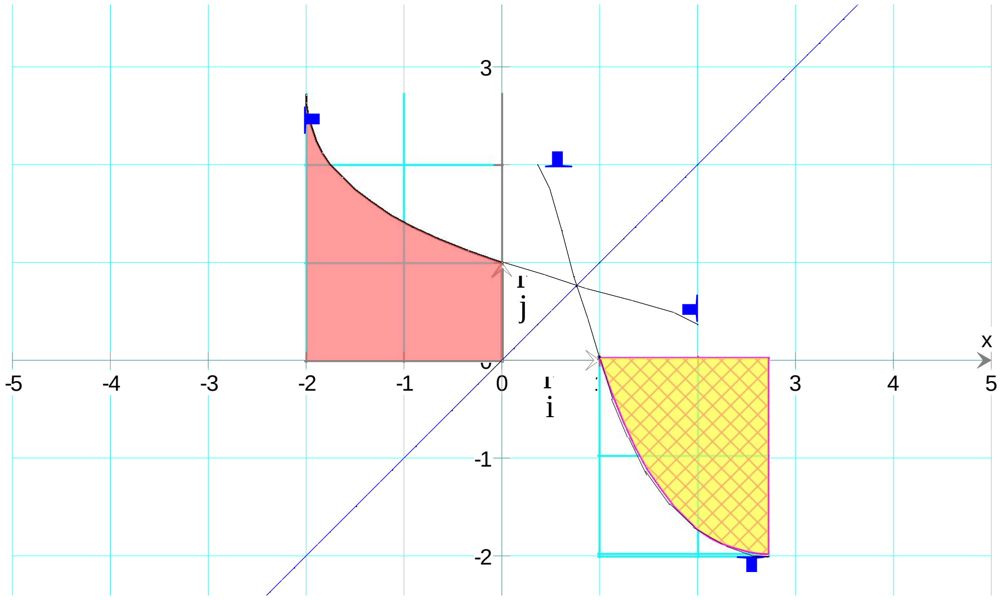
2) Pour tout x réel, $f'(x)=2e^{2x}=2\left(e^{2x}-1\right)+2=2f(x)+2$ …

3) $p(X\geq 10)=e^{-0,4.10}=e^{-4}$.

Exercice 2 :

1.a) f est continue et strictement décroissante sur $\left[\frac{1}{e},e\right]$ donc f réalise une bijection de $\left[\frac{1}{e},e\right]$ sur $f\left(\left[\frac{1}{e},e\right]\right)=\left[f(e),f\left(\frac{1}{e}\right)\right]=[-2,2]$.

b) la courbe représentative (C ') de f^{-1} est le symétrique de la courbe représentative (C) de f par rapport à la première bissectrice (la droite d'équation y = x) dans le repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.



2. a) $a_1=\int_1^e \ln x\,dx=[x\ln x - x]_1^e=1$.

b) Pour tout n de ¥*, $a_{n+1}=\int_1^e(\ln x)^{n+1}dx$.

On pose : $u(x)=(\ln x)^{n+1}$ $\qquad u'(x)=(n+1).\frac{1}{x}.(\ln x)^{n}$

$\qquad\qquad v'(x)=1 \qquad\qquad v(x)=x$

On obtient : $a_{n+1}=\left[x(\ln x)^{n+1}\right]_1^e-(n+1)\int_1^e(\ln x)^n\,dx=e-(n+1)a_n$.

c) $a_3=e-3a_2=e-3(e-2a_1)=6a_1-2e=6-2e$. (On a besoin de calculer a_2).

3. a) $\int_1^e f(x)dx=\int_1^e(\ln x)^3\,dx-3\int_1^e \ln x\,dx=a_3-3a_1=3-2e$.

b) **Si** A est l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (C') et les droites d'équations respectives x = -2, x= 0 **et y = 0** **alors** A est la différence entre l'aire du rectangle de largeur 2 = (0-(-2)) et de hauteur e et l'aire A' de la partie du plan limité par la courbe (C') et les droites d'équations respectives x = -2, x= 0 et y = e. En considérant la symétrie orthogonale d'axe (Δ) , A'= $-\int_1^e f(x)dx\text{ ua}=(2e-3)\text{ua}$. Donc A = 2e.ua - A' = 3.ua .

Si A est l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (C') et les droites d'équations respectives x = -2, x= 0 **et y = e** **alors** A = $-\int_1^e f(x)dx\text{ ua}=(2e-3)\text{ua}$.

Exercice 3 :

1. On considère, dans l'ensemble ¢ × ¢ , l'équation (E) : 3x – 8y = 5.

- Montrons d'abord que , pour tout k de ¢ , les couples $(8k-1,3k-1)$ sont solutions de (E) . En effet :
  pour tout k de ¢ , 3(8k – 1) – 8(3k – 1) = 24k - 3 – 24k + 8 = 5.
- Montrons que , si (x, y) est une solution de (E) alors il existe un entier relatif k tel que x = 8k – 1 et y = 3k – 1.

En décomposant 5 sous la forme 5 = -3 + 8 = 3.(-1) – 8.(-1) , on en déduit que le couple (-1 , -1) est une solution de (E).

De $\begin{cases}3x-8y=5\\3\times(-1)+8\times(-1)=5\end{cases}$ et par soustraction membre à membre, on obtient :

$3(x+1)-8(y+1)=0$ ou encore $3(x+1)=8(y+1)$

Comme 3 et 8 sont premiers entre eux, alors 8 divise (x + 1) .
Par suite, il existe un entier relatif k tel que : x + 1= 8k où encore x = 8k -1 .
$3(x+1)=8(y+1)\Leftrightarrow 3.8k=8(y+1)\Leftrightarrow y+1=3k\Leftrightarrow y=3k-1$
On conclue : les solutions de (E) sont donc les couples (x, y) tels que :
x = 8k -1 et y = 3k – 1 avec k ∈ ¢ .

2. **a)** Il faut démontrer l'implication suivante :

Si trois entiers relatifs n, x et y vérifient le système $\begin{cases}n=3x+2\\n=8y+7\end{cases}$ alors le couple (x, y) vérifie 3x – 8y = 5.

$$\begin{cases} n = 3x+2 \\ n = 8y+7 \end{cases} \Rightarrow (3x+2)-(8y+7)=0 \Leftrightarrow 3x-8y=5$$

Ainsi le couple (x, y) est solution de (E).

b) Déterminons tous les entiers n dans qui vérifient : n ≡ 2 (mod 3) et n ≡ 7 (mod 8).

- Remarquons d'abord que : 23 = 7. 3 + 2 et 23 = 2.8 + 7.

Il en résulte que $\begin{cases} 23 \equiv 2 \pmod 3 \\ 23 \equiv 7 \pmod 8 \end{cases}$.

$$\begin{cases} n \equiv 2 \pmod 3 \\ n \equiv 7 \pmod 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n \equiv 23 \pmod 3 \\ n \equiv 23 \pmod 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n-23 \equiv 0 \pmod 3 \\ n-23 \equiv 0 \pmod 8 \end{cases}$$

Ainsi : n – 23 est divisible par 3 et par 8 et comme $3 \wedge 8 = 1$ alors $n-23 \equiv 0 \pmod{24}$

ou encore $n \equiv 23 \pmod{24}$.

Ou : $\begin{cases} n \equiv 2 \pmod 3 \\ n \equiv 7 \pmod 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = 3x+2,\ x \in \mathbb{Z} \\ n = 8y+7,\ y \in \mathbb{Z} \end{cases}$

donc (x, y) est solution de (E) , d'où il existe k entier tel que x = 8k – 1.

Par conséquent : n = 3(8k – 1) + 2 = 24k – 1.

On peut donc écrire : $n \equiv -1 \pmod{24} \Leftrightarrow n \equiv 23 \pmod{24}$.

- Réciproquement :

  Si $n \equiv 23 \pmod{24}$ alors il existe un entier k tel que n = 24.k + 23.

  Ou encore n = 24.(k + 1) – 1 = 3.8(k + 1) – 1.

  n = 3.8(k + 1) – 3 + 2 = 3[8(k + 1) -1] + 2 donc $n \equiv 2 \pmod 3$.

  n= 8.3(k + 1) - 8 + 7 = 8[3(k + 1) -1] + 7 donc $n \equiv 7 \pmod 8$.

Par suite : n est solution du système (S) $\Leftrightarrow n \equiv 23 \pmod{24}$.

3.a) Pour tout entier naturel k, $2^{2k} = \left(2^2\right)^k = 4^k$ et comme $4 \equiv 1 \pmod 3$ alors

$2^{2k} \equiv 1 \pmod 3$.

D'autre part , Pour tout entier naturel k, $7^{2k} = \left(7^2\right)^k = 49^k$ et comme $49 \equiv 1 \pmod 8$ alors

$7^{2k} \equiv 1 \pmod 8$.

b) 1991 = 3.663 + 2 et 1991 = 8. 248 + 7 donc 1991 est solution du système (S).

D'où $1991 \equiv 23 \pmod{24}$ ou encore $1991 \equiv -1 \pmod{24}$. Il en résulte que :

$1991^{2008} \equiv 1 \pmod{24} \Leftrightarrow 1991^{2008} - 1 \equiv 0 \pmod{24}$ ainsi $1991^{2008} - 1$ est divisible par 24.

Exercice 4:

1. O est le milieu du segment [IC] et B est celui du segment [ID] donc $\overrightarrow{DC} = 2\overrightarrow{BO}$

   d'où DC = 2BO. Il en résulte que le rapport de la similitude directe f est $\dfrac{DC}{AO} = \dfrac{2BO}{BO} = 2$.

$$\left(\overrightarrow{AO},\overrightarrow{DC}\right)\equiv\left(\overrightarrow{AO},\overrightarrow{BO}\right)[2\pi] \quad \text{car} \quad \overrightarrow{DC}=2\overrightarrow{BO}$$
$$\equiv\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)[2\pi]$$
$$\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$$

Ainsi l'angle de f est $\frac{\pi}{2}$.

2.a) O étant le milieu de [AB] et OAB est un triangle isocèle de sommet principal O donc la droite (OI) est la médiatrice de [AB].
Les points C, O et I sont alignés et (OI) perpendiculaire à (AD) implique **(CO)** $\perp$ **(AD)**.
(AO) // (OB) et (DC) $\perp$ (OB) donc **(AO)** $\perp$ **(DC)**. D'où O est l'orthocentre du triangle ACD.

b) f est une similitude directe d'angle $\frac{\pi}{2}$ donc $f\left((OJ)\right)$ est la perpendiculaire à la droite (OJ) passant par f(O) = C par suite $f\left((OJ)\right)$ = (AC).

$f\left((AJ)\right)$ est la perpendiculaire à la droite (AJ) passant par f(A) = D par suite $f\left((AJ)\right)$ = (DJ).

Par conséquent : $\{f(J)\}=f\left((OJ)\right)\cap f\left((AJ)\right)=(AC)\cap(DJ)=\{J\}$.

Ce qui prouve que f(J) = J ou encore J est le centre de f.

3.a) Le rapport de la similitude indirecte g de centre I transformant A en D est $\frac{ID}{IA}=\frac{ID}{IB}=2$.

g(A) = D et $\overrightarrow{ID}=-2\overrightarrow{IA}$ donc l'axe de g est la perpendiculaire à la droite (AD) en I d'où (IC) est l'axe de g.

$O\in(IC)$ et $\overrightarrow{IC}=2\overrightarrow{IO}$ donc g(O) = C.

b) $\left(g\circ f^{-1}\right)(C)=g\left[f^{-1}(C)\right]=g(O)=C$ et $\left(g\circ f^{-1}\right)(D)=g\left[f^{-1}(D)\right]=g(A)=D$.

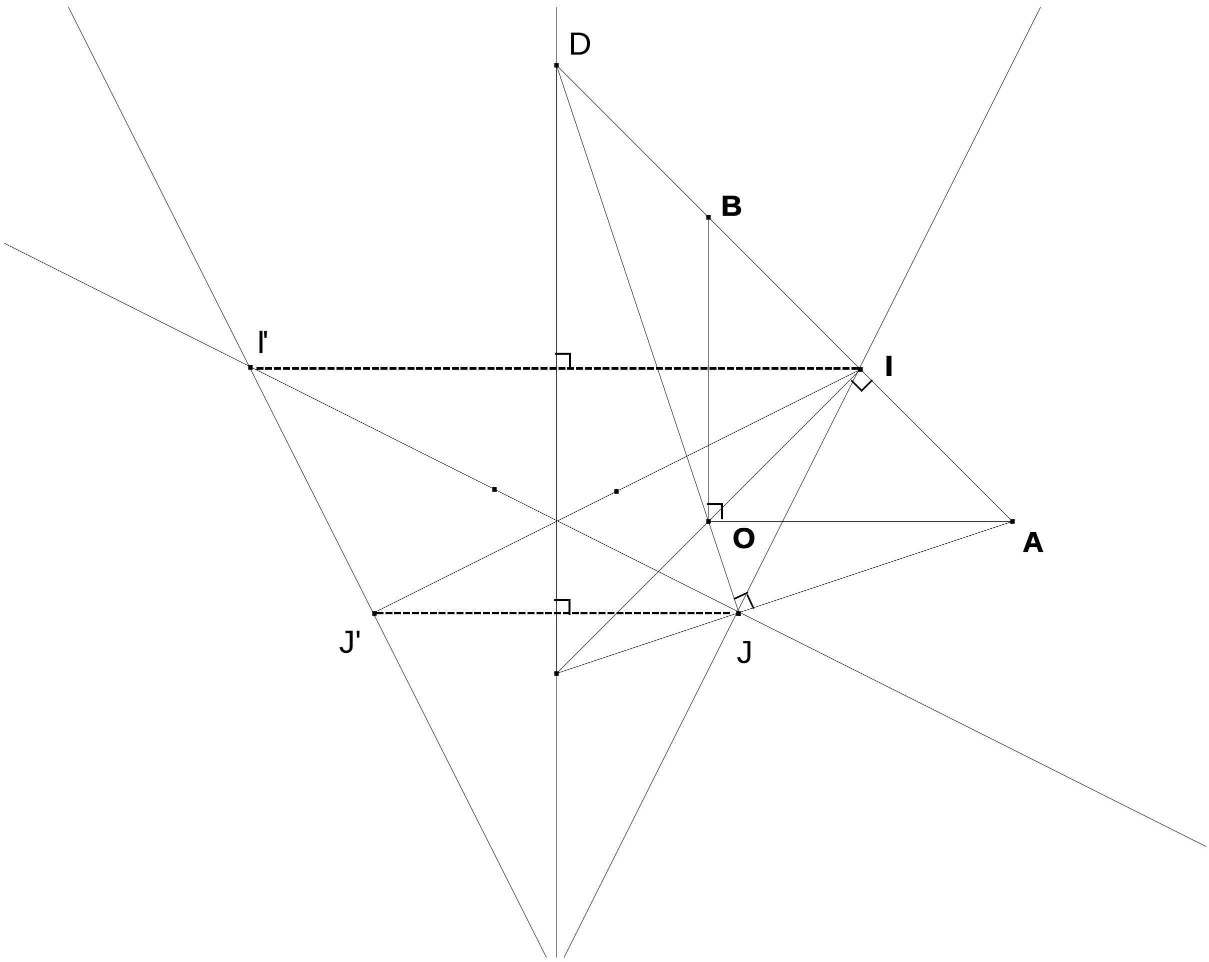
$g\circ f^{-1}$ est la composée d'une similitude directe de rapport $\frac{1}{2}$ et d'une similitude indirecte de rapport 2 donc $g\circ f^{-1}$ est une similitude indirecte de rapport 1 d'où $g\circ f^{-1}$ est un antidéplacement. Comme $g\circ f^{-1}$ fixe les points distincts C et D alors $g\circ f^{-1}=S_{(CD)}$.

4.a) $\left(g\circ f^{-1}\right)(J)=g\left[f^{-1}(J)\right]=g(J)=J'$ et $\left(g\circ f^{-1}\right)(I')=g\left[f^{-1}(I')\right]=g(I)=I$.

b) Montrons que les droites (CD) et (IJ) sont sécantes en un point K.
Pour cela, on raisonne par l'absurde et on suppose que les droites (IJ) et (CD) sont parallèles.

Comme le triangle OAB est isocèle et rectangle en O et I est le milieu du segment [AB] alors (IJ) est la médiatrice du segment [OA]. Le quadrilatère AIOJ est donc un carré .Or (OJ) est perpendiculaire à (AC) , il en résulte que (OA) est parallèle à (AC) d'où les points A, I, O et C sont alignés. Ce qui est absurde avec le fait que I est le milieu du segment [AB] et donc I et A sont distincts.

$\left(g\circ f^{-1}\right)\left((IJ)\right)=S_{(CD)}\left((IJ)\right)=(I'J')$ il en résulte que (I'J') et (CD) sont sécantes en $S_{(CD)}(K)=K$. D'où les droites (IJ), (I'J') et (CD) sont concourantes.



Exercice 5:

1.a) On a : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1\\0\\-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}$.

Si $E(0,2,3)$ alors $\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}$ ainsi $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$.

b) Le volume du tétraèdre ABCE est $V(ABCE)=\dfrac{\left|\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right).\overrightarrow{AE}\right|}{6}=\dfrac{AE^2}{6}=1.$

2.a) $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\-2\\-1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan P et $\vec{n}=-\overrightarrow{AE}$ alors les plans P et (ABC) sont parallèles.

b) $2\overrightarrow{KE}+\overrightarrow{KC}=\vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(0-x_K)+(0-x_K)=0 \\ 2(2-y_K)+(-1-y_K)=0 \\ 2(3-z_K)+(3-z_K)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3x_K=0 \\ 3-3y_K=0 \\ 9-3z_K=0 \end{cases}$

Ou $2\overrightarrow{KE}+\overrightarrow{KC}=\vec{0} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{KO}+2\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OC}=\vec{0} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{OK}=2\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OC} \Leftrightarrow \overrightarrow{OK}=\frac{1}{3}\left(2\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OC}\right)$.

Ce qui entraine : $K(0,1,3)$.

Comme 0 – 2 – 3 + 5 = 0 alors $K \in$ P.

3.a) $2\overrightarrow{KE}+\overrightarrow{KC}=\vec{0} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{KE}+\overrightarrow{EC}=\vec{0} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{EK}=\overrightarrow{EC} \Leftrightarrow \overrightarrow{EK}=\frac{1}{3}\overrightarrow{EC}$ donc le rapport de h est $\frac{1}{3}$.

b) Le plan P étant parallèle au plan (ABC) et coupant les arêtes [EA] et [EB] respectivement en I et J entraine que h(A) = I et h(B) = J donc l'image du tétraèdre ABCE par l'homothétie h est le tétraèdre IJKE.

On en déduit que : V(IJKE) = $\left(\frac{1}{3}\right)^3$.V(ABCE) = $\frac{1}{27}$.