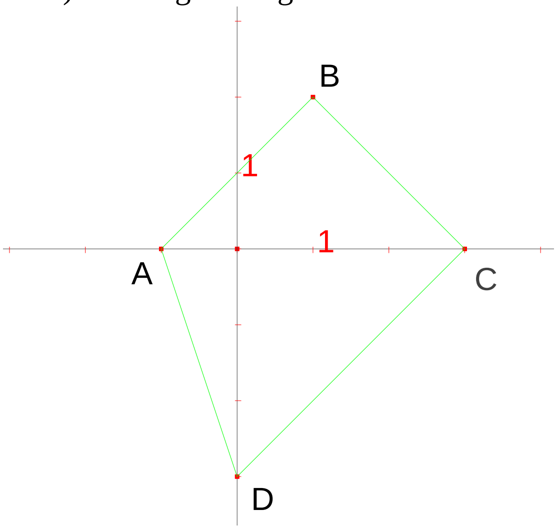
Exercice 1 :

1) a) ; 2) c) ; 3) b)

La justification n'est pas demandée, cependant pour calmer ses esprits, on donne à titre indicatif le procédé.

1) On a $1+i\sqrt{3}=2\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=2e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $1+i=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$. Ainsi un argument du nombre complexe $\frac{1+i\sqrt{3}}{1+i}$ est $\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{12}$.

2) Une figure soignée est bien suffisante .



3) L'équation différentielle est du type y'= ay + b avec a = 2 et b = 1 donc les solutions de cette équation sont les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ par f(x) = $ke^{ax}-\frac{b}{a}=ke^{2x}-\frac{1}{2}$.

Exercice 2 :

1. Par lecture graphique :

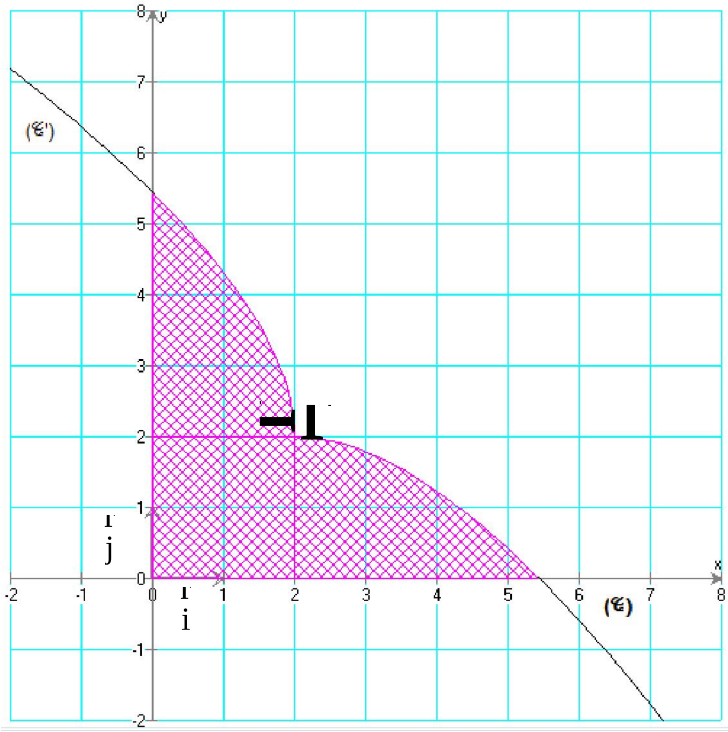
a) f(0) = 0, f(2) = 2, f(2e) = 0 et f '(2e) = $\frac{y_C-y_A}{x_C-x_A}=\frac{2e-0}{0-2e}=-1$.

b) $\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ et $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=-\infty$ car la courbe (Γ) admet une branche parabolique de direction celle de $(O,\vec{j})$ au voisinage de $+\infty$.

c) Soit g la restriction de f à l'intervalle $[2,+\infty[$. g est continue et strictement décroissante sur $[2,+\infty[$ donc g admet une fonction réciproque g^{-1}définie $f([2,+\infty[)=]-\infty,f(2)]=]-\infty,2]$.

2.

La courbe représentative ($\mathcal{C}$ ') de g^{-1} est le symétrique de la courbe représentative ($\mathcal{C}$) de g par rapport à la première bissectrice (la droite d'équation y = x) dans le repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.



3. a) Voir figure

b) $\int_2^{2e} g(x)\,dx = \int_2^{2e} x\left(1+\ln 2-\ln x\right)dx$

On pose : u(x) = 1+ ln2 - ln x , $u'(x) = -\dfrac{1}{x}$

v'(x) = x , $v(x) = \dfrac{1}{2}x^2$

On obtient $\int_2^{2e} g(x)\,dx = \left[\dfrac{1}{2}x^2\left(1+\ln 2-\ln x\right)\right]_2^{2e} + \dfrac{1}{2}\int_2^{2e} x\,dx$

$= -2 + \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{2}x^2\right]_2^{2e} = -2+\dfrac{4e^2-4}{4} = e^2-3$

c) L'aire de D est : $\left[2\int_2^{2e} g(x)\,dx+4\right]ua = \left[2\left(e^2-3\right)+4\right]ua = \left(2e^2-2\right)ua$

Exercice 3 :

1. a) Pour tout entier naturel n, $(2n+2)-e(2n+1) = 2(1-e)n+(2-e)$ et comme (1-e) < 0 et (2 – e) < 0 alors $(2n+2)-e(2n+1)<0$.

b) Pour tout entier naturel n non nul,

$$u_{2n+2}-u_{2n}=\left(-\frac{1}{e}+\frac{2}{e^2}-\frac{3}{e^3}+\dots+\frac{2n}{e^{2n}}-\frac{2n+1}{e^{2n+1}}+\frac{2n+2}{e^{2n+2}}\right)-\left(-\frac{1}{e}+\frac{2}{e^2}-\frac{3}{e^3}+\dots+\frac{2n}{e^{2n}}\right)$$
$$=-\frac{2n+1}{e^{2n+1}}+\frac{2n+2}{e^{2n+2}}$$
$$=\frac{1}{e^{2n+2}}\left[-(2n+1)e+(2n+2)\right]<0$$

Donc la suite $(u_{2n})_{n\geq 1}$ est décroissante.

2. Pour tout entier naturel n non nul,

$$u_{2n+3}-u_{2n+1}=\left(-\frac{1}{e}+\frac{2}{e^2}-\frac{3}{e^3}+\dots-\frac{2n+1}{e^{2n+1}}+\frac{2n+2}{e^{2n+2}}-\frac{2n+3}{e^{2n+3}}\right)-\left(-\frac{1}{e}+\frac{2}{e^2}-\frac{3}{e^3}+\dots-\frac{2n+1}{e^{2n+1}}\right)$$
$$=\frac{2n+2}{e^{2n+2}}-\frac{2n+3}{e^{2n+3}}$$
$$=\frac{1}{e^{2n+3}}\left[(2n+2)e-(2n+3)\right]=\frac{1}{e^{2n+3}}\left[2(e-1)n+2e-3\right]>0$$

Donc la suite $(u_{2n+1})_{n\geq 1}$ est croissante.

3. a) Pour tout entier naturel n non nul,

$$u_{2n+1}-u_{2n}=\left(-\frac{1}{e}+\frac{2}{e^2}-\frac{3}{e^3}+\dots+\frac{2n}{e^{2n}}-\frac{2n+1}{e^{2n+1}}\right)-\left(-\frac{1}{e}+\frac{2}{e^2}-\frac{3}{e^3}+\dots+\frac{2n}{e^{2n}}\right)=-\frac{2n+1}{e^{2n+1}}<0$$

Il en résulte que : $u_{2n}<u_{2n+1}$, pour tout entier naturel n non nul.

b) $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_{2n}-u_{2n+1})=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{2n+1}{e^{2n+1}}=\dfrac{1}{\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{e^{2n+1}}{2n+1}}=0$.

4. Les suites $(u_{2n})_{n\geq 1}$ et $(u_{2n+1})_{n\geq 1}$ donc elles convergent vers la même limite α.

La suite $(u_{2n})_{n\geq 1}$ est décroissante donc $(u_{2n})_{n\geq 1}$ est majorée par son premier terme u_2.

La suite $(u_{2n+1})_{n\geq 1}$ est croissante donc $(u_{2n+1})_{n\geq 1}$ est minorée par son premier terme u_3.

Ainsi, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on a : $u_3\leq u_{2n+1}<u_{2n}\leq u_2$ et par suite $u_3<\alpha<u_2$.

Exercice 4:

1.a) On a : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\0\\-2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1\\-4\\-1\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-8\\-4\\8\end{pmatrix}$.

b) $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\neq\vec{0}$ donc les points A, B et C sont non alignés.

c) Le volume du tétraèdre OABC est

$$V(OABC)=\frac{\left|\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right).\overrightarrow{AO}\right|}{6}=\frac{\left|-8\times(-3)-4\times(-2)+8\times(-6)\right|}{6}=\frac{8}{3}.$$

2. H le projeté orthogonal du point O sur le plan (ABC) donc OH est la hauteur du tétraèdre OABC d'où : $\mathcal{V}(OABC) = \frac{1}{3}.OH.\ \mathcal{A}\,(OAB)$.

Comme $\mathcal{A}\,(OAB) = \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right\| = \frac{1}{2}.4\sqrt{9} = 6$ alors $\mathcal{V}(OABC) = 2\ OH$.

Par conséquent : $OH = \frac{4}{3}$.

3. a) $OH = \frac{4}{3}$ et le rayon de la sphère est $R = OA = \sqrt{9+4+36} = \sqrt{49} = 7$.

OH < R donc l'intersection de la sphère (S) et du plan (ABC) est un cercle $\mathcal{C}$ de centre H le projeté orthogonal de O sur le plan (ABC).

b) Le rayon du cercle $\mathcal{C}$ est $r = \sqrt{R^2 - OH^2} = \sqrt{\frac{425}{9}} = \frac{5\sqrt{17}}{3}$.

Exercice 5:

1. Le nuage de point de la série (X, Y) est allongé donc un ajustement affine entre les variables X et Y est justifié.

(On donnera des valeurs approchées par défaut).

2.a) $\overline{X} = 119,6$ et $\sigma_X\ ;\ 25,36$.

b) $\overline{Y}\ ;\ 25,12$ et $\sigma_Y\ ;\ 11,75$.

c) Le coefficient de corrélation linéaire de la série (X, Y) est $r\ ;\ 0,965$.

3. Le poids moyen Y_{17} des filles de 17 ans ayant une taille $X_{17} = 165$ est

$Y_{17} = f\left(165\right) = 2,1463\,e^{3,2505}\ ;\ 55,4$.