SECTION : SCIENCES EXPERIMENTALES

EPREUVE : MATHÉMATIQUES

DUREE : 3 h

COEFFICIENT : 3

Exercice 1 (3 points)

Pour chacune des questions suivantes une seule des trois réponses proposées est exacte.
 Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie.
 Aucune justification n'est demandée.
 Une réponse correcte vaut 1 point, une réponse fautive ou l'absence de réponse vaut 0 point.

ABCDEFGH est un cube d'arête 1.

On munit l'espace du repère orthonormé direct $(A, \overline{AB}, \overline{AD}, \overline{AE})$.

1) $\overline{AC} \cdot \overline{BH}$ est égal à :

- a) 0 b) $\sqrt{2}$ c) $\sqrt{3}$.

2) Une équation du plan (ECG) est :

- a) $x + y - 2 = 0$ b) $x + y - 1 = 0$ c) $x - y = 0$.

3) On désigne par I le milieu du segment [EG].

Soit S la sphère de centre I et passant par F. Alors on a :

- a) Le plan (BEG) est tangent à la sphère S.
 b) L'intersection de la sphère S et le plan (BEG) est le cercle de diamètre [EG].
 c) L'intersection de la sphère S et le plan (BEG) est le cercle circonscrit au triangle EGH.

Exercice 2 (5 points)

On considère la suite (I_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan x)^n dx$.

1) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n \geq 0$.

b) Montrer que (I_n) est une suite décroissante.

c) En déduire que (I_n) est une suite convergente.

2) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n + I_{n+2} = \frac{1}{n+1}$.

b) En déduire la limite de la suite (I_n) .

3) Calculer I_1 , I_2 et I_4 .

Exercice 3 (6 points)

- 1) a) Résoudre, dans $\mathbb{C}$, l'équation (E): $z^2 - z + 1 = 0$.
 b) Mettre les solutions de (E) sous forme exponentielle.
 c) En déduire les solutions de l'équation (E'): $z^4 - z^2 + 1 = 0$.
- 2) Mettre le polynôme $P(z) = z^4 - z^2 + 1$ sous la forme d'un produit de deux polynômes du second degré à coefficients réels.
- 3) Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.
 On désigne par A, B, C et D les images des solutions de l'équation (E') telles que $\text{Re}(z_A) > 0, \text{Im}(z_A) > 0$; $\text{Re}(z_B) > 0$ et $\text{Im}(z_D) > 0$
 a) Placer les points A, B, C et D.
 b) Déterminer la nature du quadrilatère ABCD.

Exercice 4 (6 points)

Dans le graphique ci-contre :
 $\mathcal{C}$ et Γ sont les courbes représentatives,
 dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$, d'une
 fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ et de
 sa fonction dérivée f' .

Chacune des deux courbes $\mathcal{C}$ et Γ possède :
 - une branche parabolique de direction
 l'axe des ordonnées au voisinage de $+\infty$.
 - une asymptote d'équation $y = 0$ au
 voisinage de $-\infty$.

- 1) Par une lecture graphique :
 a) Déterminer, parmi les courbes $\mathcal{C}$ et Γ , celle qui représente la fonction f' .
 b) Déterminer $f(0)$, $f'(0)$ et $f'(1)$.
 c) Dresser le tableau de variation de f .
- 2) On admet que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{e^x}{1+x+x^2}$.
 a) Calculer $f'(x)$, pour $x \in \mathbb{R}$.
 b) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a : $f(x) - f'(x) = f(x) \cdot \frac{2x+1}{1+x+x^2}$.
 c) En déduire les coordonnées du point d'intersection des deux courbes $\mathcal{C}$ et Γ .
 d) Montrer que pour tout $x \geq -\frac{1}{2}$ on a : $f(x) - f'(x) \geq \frac{4}{3\sqrt{e}} \cdot \frac{2x+1}{1+x+x^2}$.

3) Soit t un réel supérieur ou égal à 1.

On désigne par $A(t)$ l'aire de la partie du plan limitée par les deux courbes $\mathcal{C}$ et Γ et les droites d'équations : $x = -\frac{1}{2}$ et $x = t$.

- a) Montrer que $A(t) \geq \frac{4}{3\sqrt{e}} \ln(1+t+t^2) - \frac{4}{3\sqrt{e}} \ln\left(\frac{3}{4}\right)$.
- b) En déduire $\lim_{t \rightarrow +\infty} A(t)$.