Exercice1 :

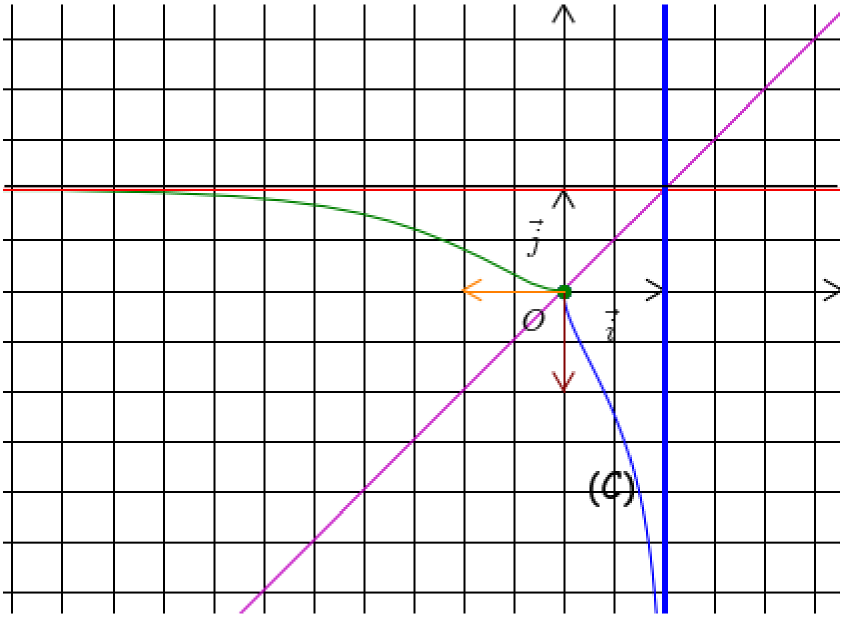
1.b) ; 2.c) ; 3.c) ; 4.b)

Exercice 2 :

1. a) $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}-\frac{1}{\sqrt{x}}\cdot\frac{\ln(1-\sqrt{x})}{-\sqrt{x}}=-\infty$.

b) f n'est pas dérivable à droite en 0 donc ($\mathscr{C}$) admet une demi tangente verticale au point d'abscisse 0.

De $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=-\infty$, on en déduit que la droite d'équation x = 1 est asymptote à ($\mathscr{C}$).



2. a) f est continue et strictement décroissante sur [0,1[donc f réalise une bijection de [0,1[sur $f([0,1[)=]-\infty,0]$.

b) $\Gamma=S_\Delta(C)$ où $\Delta : y=x$.

3. a) $\begin{cases}x\in[0,1[\\ f(x)=y\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y\in]-\infty,0]\\ f^{-1}(y)=x\end{cases}$

$$f(x)=y\Leftrightarrow\ln(1-\sqrt{x})=y\Leftrightarrow1-\sqrt{x}=e^y\Leftrightarrow\sqrt{x}=1-e^y\Leftrightarrow x=(1-e^y)^2$$

Ainsi , pour tout x de $]-\infty,0]$, $f^{-1}(x)=(e^x-1)^2$.

b) $A=\int_{-\ln2}^{0}f^{-1}(x)dx\ \text{ua}=\int_{-\ln2}^{0}(e^{2x}-2e^x+1)dx\ \text{ua}$

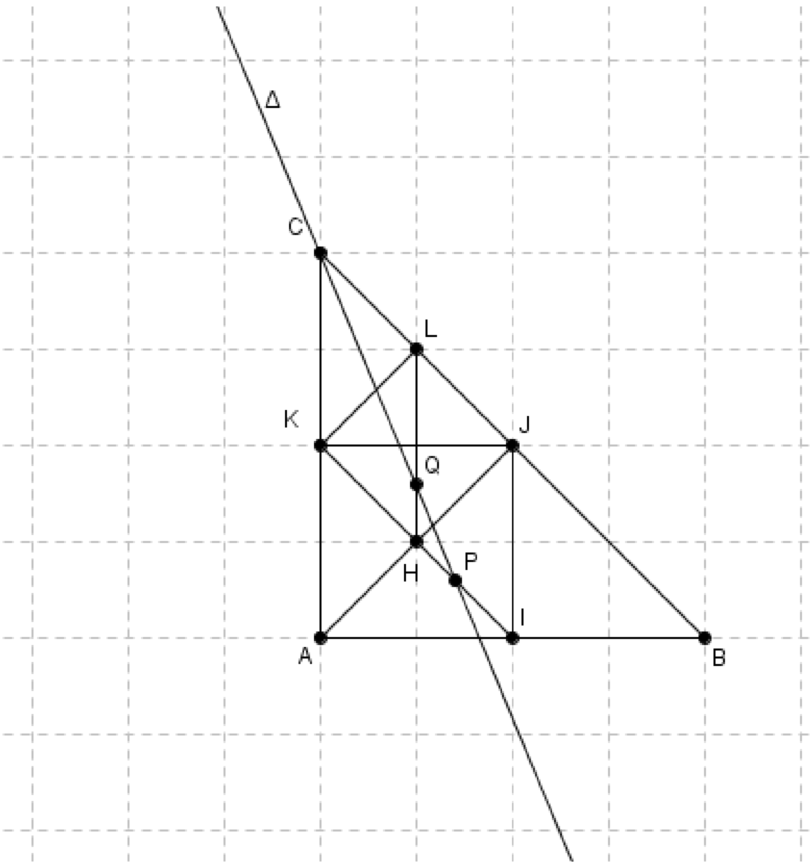
$$= \left[\frac{1}{2}e^{2x} - 2e^{x} + x\right]_{-\ln 2}^{0} \text{ ua} = \left(\ln 2 - \frac{5}{8}\right)\text{ua}$$

c) Le symétrique de la partie P du plan délimitée par (Γ) et les droites d'équations x = -ln2, x = 0 et y = 0 est la partie du plan P' du plan délimitée par $(\mathscr{C})$ et les droites y = -ln2 , y = 0 et x = 0. Il en résulte que :

$$\int_0^{\frac{1}{4}} f(x)dx = -\left(\frac{1}{4}\ln 2 - \int_{-\ln 2}^{0} f^{-1}(x)dx\right) = \frac{5}{8} - \frac{3\ln 2}{4}.$$

Exercice3 :

1.



3. a) AIJK est un carré direct .

$$\left(\widehat{\overrightarrow{JA},\overrightarrow{JK}}\right) \equiv \frac{1}{2}\left(\widehat{\overrightarrow{JI},\overrightarrow{JK}}\right)[2\pi]$$

$$\equiv -\frac{\pi}{4}[2\pi]$$

Donc l'angle de f est $-\frac{\pi}{4}$

$$\frac{JK}{JA} = \frac{JK}{JK\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Donc le rapport de f est $\frac{\sqrt{2}}{2}$

b) Le triangle JKC est isocèle, direct et rectangle en K et L est milieu de [JC] donc KJL est un triangle isocèle, direct et rectangle en L d'où :

$\frac{JL}{JK} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\left(\widehat{\overrightarrow{JK},\overrightarrow{JL}}\right) \equiv -\frac{\pi}{4}[2\pi]$ d'où f(K) = L.

c) JIAK est un carré indirect de centre H . Comme H est milieu de [AJ] alors JIH est un triangle isocèle, rectangle en H et indirect . Par suite :

$\frac{JH}{JI} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\left(\widehat{\overrightarrow{JI},\overrightarrow{JH}}\right) \equiv -\frac{\pi}{4}[2\pi]$ et ainsi f(I) = H.

3. a) φ est une similitude indirecte de rapport $\left|-\frac{(1+i)}{2}\right| = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

$$-\left(\frac{1+i}{2}\right)\overline{z_C} + \frac{1+i}{2} = -\left(\frac{1+i}{2}\right)\bar{i} + \frac{1+i}{2} = \left(\frac{1+i}{2}\right).i + \frac{1+i}{2} = \frac{(1+i)^2}{2} = i = z_C$$

Donc φ fixe C et comme le rapport de φ est différent de 1 alors C est le centre de φ.

Par suite, φ est une similitude indirecte.

b) $z_I = \frac{z_B}{2} = \frac{1}{2}$, $z_K = \frac{z_C}{2} = \frac{i}{2}$, $z_J = \frac{1+i}{2}$ et $z_H = \frac{z_J}{2} = \frac{1+i}{4}$.

c) $z_I' = -\frac{(1+i)}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1+i}{2} = \frac{1+i}{4} = z_H$ donc $\varphi(I) = H$.

$$z_J' = -\frac{(1+i)}{2} \times \frac{(1-i)}{2} + \frac{1+i}{2} = \frac{(1+i)^2}{4} = \frac{i}{2} = z_K \quad \text{donc} \quad \varphi(J) = k.$$

d) On a : $f \circ S_{(IK)}$ est la composée d'une similitude directe et d'une similitude indirecte donc $f \circ S_{(IK)}$ est une similitude indirecte.

D'autre part : $f \circ S_{(IK)}(I) = f(I) = H = \varphi(I)$ et $f \circ S_{(IK)}(J) = f(A) = K = \varphi(J)$

Donc $\varphi = f \circ S_{(IK)}$.

4. a) C, I et $\varphi(I) = K$ ne sont pas alignés donc (Δ) l'axe de φ est la bissectrice intérieure de l'angle $\left(\overrightarrow{CI},\overrightarrow{CH}\right)$.

b) On a $\varphi(P) = f \circ S_{(IK)}(P) = f(P)$ car $P \in (IK)$.

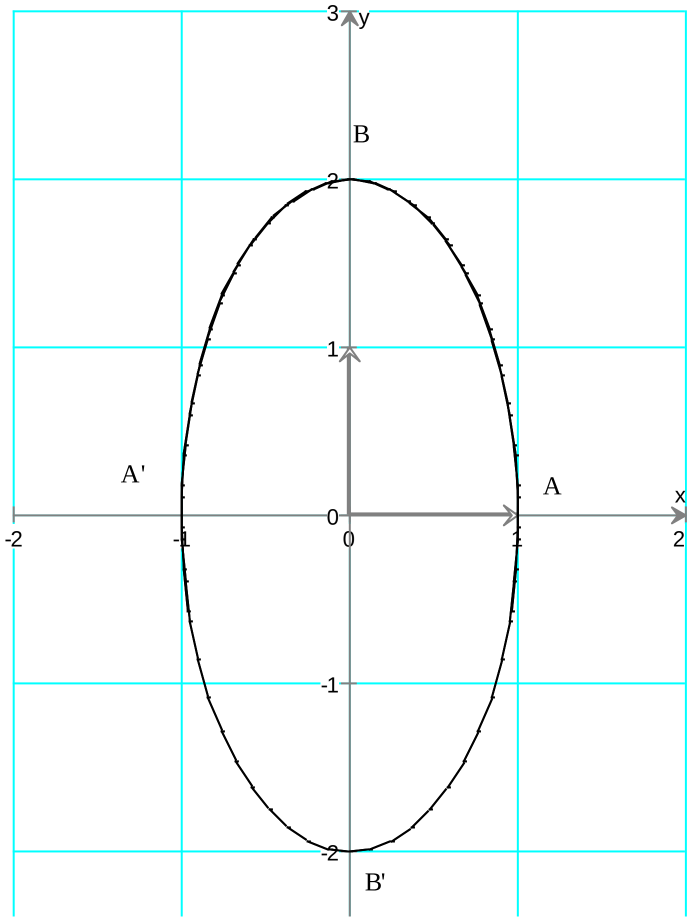
D'autre part : $P \in (IK)$ donc $f(P) \in f((IK)) = (HL)$.

Or $P \in \Delta$ donc $\varphi(P) \in \varphi(\Delta) = \Delta$ d'où $\{f(P)\} = \Delta \cap (HL) = \{Q\}$.

Par suite , $f(P) = Q$.

Exercice 4 :

1. a) Posons a = 1 , b = 2 , nous obtenons c = $\sqrt{|b^2 - a^2|} = \sqrt{3}$.
   Les sommets de l'ellipse (E) sont A(1, 0), A'(-1, 0), B(0,2) et B'(0, -2).
   Les foyers de l'ellipse (E) sont $F\left(0,\sqrt{3}\right)$ et $F'\left(0,-\sqrt{3}\right)$.
   b)



   c) $\cos^2\theta + \dfrac{\left(2\sin^2\theta\right)}{4} = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ donc $M\left(\cos\theta, 2\sin\theta\right) \in (E)$.

2. Une équation de la tangente (T) à (E) en M est :

$$x\cos\theta + y\frac{2\sin\theta}{4} = 1 \Leftrightarrow 2x\cos\theta + y\sin\theta - 2 = 0.$$

3. a) $T \cap \left(O,\vec{i}\right) = \left\{P\left(\dfrac{1}{\cos\theta}, 0\right)\right\}$ et $T \cap \left(O,\vec{j}\right) = \left\{Q\left(0, \dfrac{2}{\sin\theta}\right)\right\}$

Donc $\mathscr{A} = \dfrac{1}{2} OP \times OQ = \dfrac{2}{\sin 2\theta}$.

b) $\mathscr{A}$ est minimum $\Leftrightarrow \begin{cases} \sin 2\theta = 1 \\ 0 < \theta < \dfrac{\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\theta = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \\ 0 < \theta < \dfrac{\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \theta = \dfrac{\pi}{4}$

Pour $\theta = \dfrac{\pi}{4}$: $P\left(\sqrt{2}, 0\right)$, $Q\left(0, 2\sqrt{2}\right)$ et $M\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2}\right)$. D'où M est milieu de [PQ].

Réciproquement :

si M est le milieu de [PQ] alors $\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{1}{2\cos\theta} \\ 2\sin\theta = \dfrac{1}{\sin\theta} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos^2\theta = \dfrac{1}{2} \\ \sin^2\theta = \dfrac{1}{2} \end{cases}$

Comme $\theta \in \left]0, \dfrac{\pi}{4}\right[$ alors $\cos\theta > 0$ et $\sin\theta > 0$ donc $\cos\theta = \sin\theta = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Il en suit : si M est le milieu de [PQ] alors $\theta = \dfrac{\pi}{4}$

Ainsi, M est le milieu de [PQ] $\Leftrightarrow$ $\theta = \dfrac{\pi}{4}$

Exercice 5 :

1. $y'' + y = 0 \Leftrightarrow y = A\cos x + B\sin x$, où A et B sont réels.

2. a) Pour tout x réel, $g'(x) + g\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = -\sin x + \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = -\sin x + \sin x = 0$.

   Donc $g \in (E)$.

   b) On a pour tout x réel, $f'(x) + f\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = 0$ donc

   $f''(x) - f'\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = 0 \Leftrightarrow f''(x) = f'\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)$.

   c) Si f est solution de (E) alors pour tout x réel, $f'(x) = -f\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)$ d'où

   $f'\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = -f\left(\dfrac{\pi}{2} - \left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)\right) = -f(x)$

et $f''(x)=f'\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$, il en suit : $f''(x)=f'\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=-f(x)$.

Ou encore : $f''(x)+f(x)=1$ donc f est une solution de l'équation $y''+y=0$.

d) Si f est solution de l'équation $y''+y=0$ alors pour tout x réel, il existe deux réels A et B tels que $f(x)=A\cos x+B\sin x$. D'où $f'(x)=-A\sin x+B\cos x$.

Or $f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=A\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+B\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=A\sin x+B\cos x$

Donc, f appartienne (E) $\Leftrightarrow f'(x)+f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=0 \Leftrightarrow B=0$

Autrement dit : $f(x)=A\cos x$.

Ainsi , (E) est l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $y=A\cos x$, où $A\in\mathbb{R}$